Fourier-Motzkin-Elimination I

Ziel: Entscheide zu einem gegebenen System von Ungleichungen, ob es zulässig ist.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}
$$

Erster Schritt: Entferne die Variable x.

Fourier-Motzkin-Elimination II

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & \color{green}{\leq} & \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z \\
x & \color{green}{\leq} & 3 & & & - & \frac{2}{3}z \\
x & \color{green}{\leq} & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & \\
x & \color{red}{\geq} & -3 & + & 2y & - & z \\
x & \color{red}{\geq} & -2 & & & & \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination III

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & \color{green}{\leq} & \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z \\
x & \color{green}{\leq} & 3 & & & - & \frac{2}{3}z \\
x & \color{green}{\leq} & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & \\
x & \color{red}{\geq} & -3 & + & 2y & - & z \\
x & \color{red}{\geq} & -2 & & & & \\
& & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}
$$

Dieses System ist genau dann zulässig, wenn das folgende System eine Lösung hat:

$$
\begin{array}{rcl}
\min\left\{\frac{10}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z, \quad 3 - \frac{2}{3}z, \quad \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y\right\} & \geq & \max\{-3 + 2y - z, \quad -2\} \\
2y + 2z & \leq & 7
\end{array}
$$

Fourier-Motzkin-Elimination IV

$$\begin{aligned} \min\left\{\tfrac{10}{3}-\tfrac{2}{3}y-\tfrac{4}{3}z,\quad 3-\tfrac{2}{3}z,\quad \tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}y\right\} &\geq \max\{-3+2y-z,\quad -2\} \\ 2y+2z &\leq 7 \end{aligned}$$

Dieses System kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\ \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z & \geq & -2 & & & & \\ 3 & & & - & \frac{2}{3}z & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\ 3 & & & - & \frac{2}{3}z & \geq & -2 & & & & \\ \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\ \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & & \geq & -2 & & & & \\ & & 2y & + & 2z & \leq & 7 & & & & \end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination V

Umwandlung in Standardform:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\frac{8}{3}y & + & \frac{1}{3}z & \leq & \frac{19}{3} \\
\frac{2}{3}y & + & \frac{4}{3}z & \leq & \frac{16}{3} \\
\frac{8}{3}y & - & z & \leq & 6 \\
 & & \frac{2}{3}z & \leq & 5 \\
\frac{3}{2}y & - & z & \leq & \frac{11}{2} \\
-\frac{1}{2}y & & & \leq & \frac{9}{2} \\
2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}
$$

Iteriere diese Schritte und entferne *alle* Variablen.

Fourier-Motzkin-Elimination VI

Enstehung der Ungleichungen im neuen System:

$$\frac{8}{3}y + \frac{1}{3}z \leq \frac{19}{3}$$

enstand aus

$$\frac{10}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \geq -3 + 2y - z$$

Summation

Diese entstand aus den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x &\leq \frac{10}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \\ x &\geq -3 + 2y - z \end{aligned}$$

Skalierung mit nicht-negativem Faktor

Diese entstanden aus den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &\leq 10 \\ -x + 2y - z &\leq 3 \end{aligned}$$

Fourier-Motzkin-Elimination VII

Eigenschaften des neuen Systems:

- Es gibt eine Variable weniger.
- Das neue System ist genau dann zulässig, wenn das alte es war.
- Jede Ungleichung im neuen System ist nicht-negative Linearkombination von Ungleichungen des alten Systems.

Fourier-Motzkin-Elimination

Theorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ (mit $n \geq 1$). Dann gibt es $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times (n-1)}$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ mit $\tilde{m} \leq \max\{m, \frac{m^2}{4}\}$, sodass gilt:

(a) Jede Ungleichung im System $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ ist eine positive Linearkombination von Ungleichungen aus $Ax \leq b$

(b) Das System $Ax \leq b$ hat genau dann eine Lösung, wenn $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ eine Lösung hat.

Beweis:

Es sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Wir entfernen die Variable mit Index 1.

Partitioniere die Zeilenindizes $\{1,\dots,m\}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} U &:= \{i \in \{1,\dots,m\} \mid a_{i1} > 0\} \\ L &:= \{i \in \{1,\dots,m\} \mid a_{i1} < 0\} \\ N &:= \{i \in \{1,\dots,m\} \mid a_{i1} = 0\} \end{aligned}$$

O.B.d.A (nach Skalierung): $|a_{i1}| = 1$ für alle $i \in U \cup L$.

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ u & \vdots & & & \vdots \\ & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ L & \vdots & & & \vdots \\ & -1 & & & \\ & 0 & & & \\ N & \vdots & & & \vdots \\ & 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Für $\tilde{a}_i = (a_{i2}, \dots a_{in})$ und $\tilde{x} = (x_2, \dots x_n)$ (die leer sind, falls $n = 1$), ersetze die Ungleichungen, die zu Indizes in U und L gehören, durch

$$\tilde{a}_i^t \tilde{x} + \tilde{a}_k^t \tilde{x} \leq b_i + b_k \qquad i \in U, k \in L. \tag{12}$$

$x_1 + \tilde{a}_i^t \tilde{x} \leq b_i, \quad -x_1 + \tilde{a}_k^t \tilde{x} \leq b_k$

- $|U| \cdot |L|$ neue Ungleichungen
- Jede neue Ungleichung ist eine positive Linearkomination von gegebenen Ungleichungen.

Die Ungleichungen mit Index in N werden geschrieben als

$$\tilde{a}_l^t \tilde{x} \leq b_l \qquad l \in N. \tag{13}$$

$\Rightarrow$ (12) and (13) bilden zusammen ein Ungleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ mit $n - 1$ Variablen, Jede Lösung von $Ax \leq b$ liefert direkt eine Lösung von $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$ durch Einschränken von $x = (x_1, \ldots, x_n)$ auf $(x_2, \ldots, x_n)$.

Andererseite: Sei $\tilde{x} = (x_2, \ldots, x_n)$ eine Lösung von $\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$. Setze $\tilde{x}_1$ auf einen Wert im (nicht-leeren) Intervall

$$\left[\max\{\tilde{a}_k^t \tilde{x} - b_k \mid k \in L\}, \quad \min\{b_i - \tilde{a}_i^t \tilde{x} \mid i \in U\}\right]$$

wobei $\min \emptyset := \infty$ und $\max \emptyset = -\infty$.
$\Rightarrow x = (\tilde{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a solution of $Ax \leq b$. $\square$

Theorem (Lemma von Farkas für ein System von Ungleichungen)

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ hat das System $Ax \leq b$ genau dann eine Lösung, wenn es keinen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \geq 0$, $u^t A = 0^t$ und $u^t b < 0$ gibt.

<u>Beweis:</u> „$\Longrightarrow$": Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \geq 0$, $u^t A = 0^t$ und $u^t b < 0$, dann $0 = (u^t A)x = u^t A x \leq u^t b < 0$

$\lightning$

„$\Leftarrow$": Annahme: $Ax \leq b$ hat keine Lösung.

Sei: $A^{(0)} = A$ und $b^{(0)} = b$.

Wende Fourier-Motzkin-Elimination auf

$A^{(0)}x^{(0)} \leq b^{(0)}$. $\rightsquigarrow$ Erhalte Ungleichungssystem

$A^{(1)}x^{(1)} \leq b^{(1)}$, das ebenfalls nicht zulässig

ist, das eine Variable weniger enthält

und in dem jede Ungleichung nicht-

negative Linearkombination von

Ungleichungen in $A^{(0)}x \leq b^{(0)}$ ist

Iteriere das Verfahren, bis ein System $A^{(n)}x^{(n)} \leq b^{(n)}$ entsteht, das keine Variablen enthält (d.h. $x^{(n)}$ ist ein Vektor der Länge 0) und das ebenfalls nicht erfüllbar ist. $\Rightarrow$ $b^{(n)}$ hat einen Eintrag, der negativ ist.

Und: Jede Ungleichung in $A^{(n)}x^{(n)} \leq b^{(n)}$ ist nicht-negative Linearkombination von Ungleichungen in $Ax \leq b$

$\Rightarrow$ Es gibt einen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ mit

$u^t A = 0$ und $u^t b < 0$. $\square$

Lemma von Farkas

Theorem (Lemma von Farkas, allgemeinster Fall)

Für $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$ hat genau eines der beiden folgenden System eine Lösung:

System 1:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array}$$

System 2:

$$\begin{array}{rcrcl} u^t A & + & v^t C & \geq & 0^t \\ u^t B & + & v^t D & = & 0^t \\ u & & & \geq & 0 \\ u^t a & + & v^t b & < & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas

Beweis:
Das erste System ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcr} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & \leq & b \\ -Cx & - & Dy & \leq & -b \\ -I_{n_1}x & & & \leq & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas für lineare Ungleichungen: Dieses System genau dann eine Lösung, wenn das folgende System keine Lösung hat:

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1^t A & + & u_2^t C & - & u_3^t C & - & u_4^t & = & 0^t \\ u_1^t B & + & u_2^t D & - & u_3^t D & & & = & 0^t \\ u_1^t a & + & u_2^t b & - & u_3^t b & & & < & 0^t \\ u_1 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & u_2 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & u_3 & & & \geq & 0 \\ & & & & & & u_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Dieses ist äquivalent zum zweiten System des Theorems. $\square$

Lemma von Farkas

Corollary (Lemma von Farkas, Varianten)

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt:

(a) Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$ und $Ax = b$, wenn es keinen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u^t A \geq 0^t$ und $u^t b < 0$ gibt.

(b) Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$, wenn es keinen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u^t A = 0^t$ und $u^t b < 0$ gibt.

Beweise: Beschränke das vorige Theorem auf ...

(a) die Matrix C und den Vektor b.

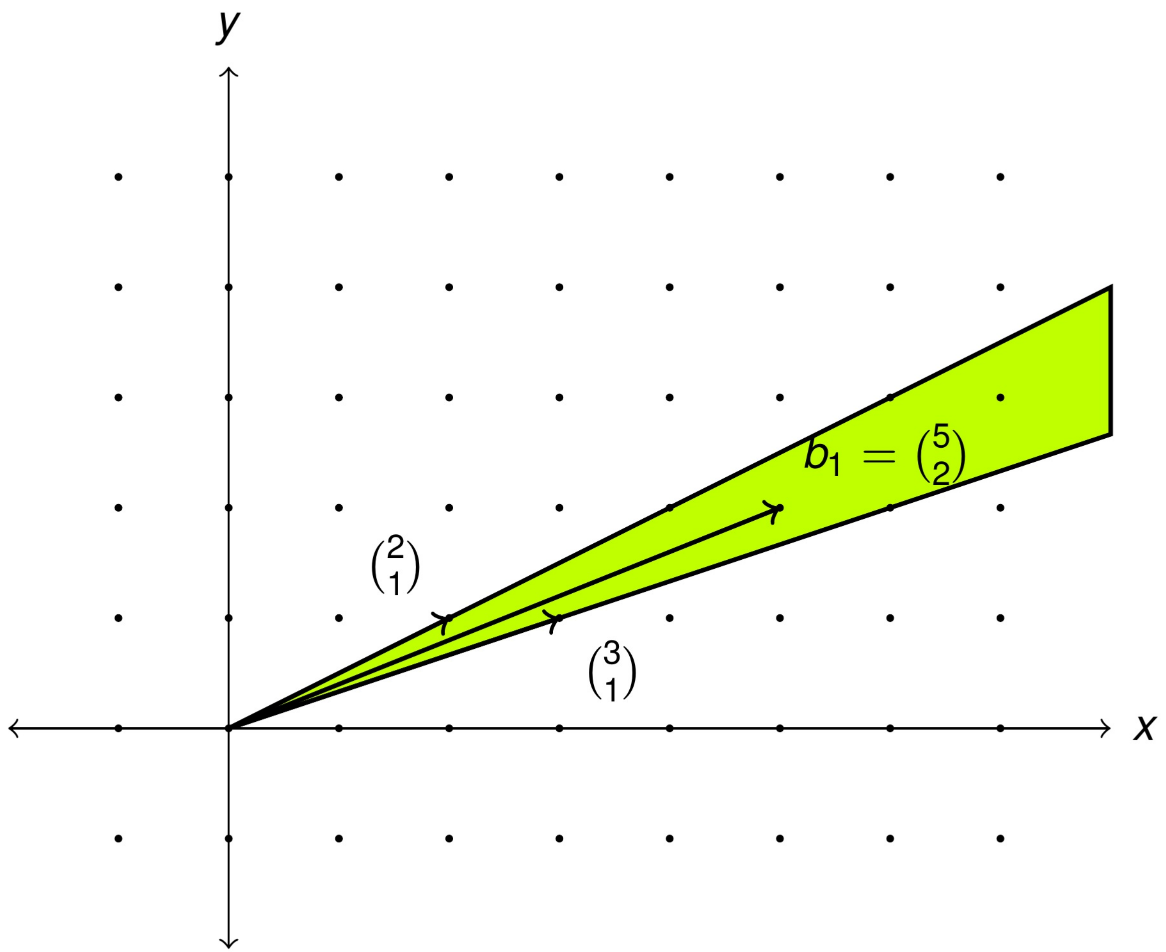
(b) die Matrix D und den Vektor b. $\square$

Version (a) hat eine geometrische Interpretation.

Lemma von Farkas: Illustration:

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \binom{5}{2}$ und $b_2 = \binom{1}{3}$.

- $b_1 \in \text{cone}(\{\binom{2}{1}, \binom{3}{1}\})$



Lemma von Farkas: Illustration:

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \binom{5}{2}$ und $b_2 = \binom{1}{3}$.

- b_2 kann vom Kegel durch eine Hyperebene, die orthogonal zu $u = \binom{1}{-2}$ ist, getrennt werden.