Algorithm 7: Ellipsoid Algorithm

Input: A separation oracle for a closed convex set $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a number $R > 0$ with $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, and a number $\epsilon > 0$

Output: An $x \in K$ or the message "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$".

$p_0 := 0$, $A_0 := R^2 I_n$;

for $k = 0, \ldots, N(R, \epsilon) := \lceil 8(n+1)(n \ln(2R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})) \rceil$ **do**

  if $p_k \in K$ **then**

    return p_k;

  Let $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ be a vector with $\bar{a}^t y > \bar{a}^t p_k$ for all $y \in K$;

  $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$;

  p_{k+1} an approximation of $\widetilde{p_{k+1}} := p_k + \frac{1}{n+1} b_k$ with maximum error $\delta < \left(2^{6(N(R,\epsilon)+1)} 16 n^3\right)^{-1}$;

  A_{k+1} a symmetric approximation of $\widetilde{A_{k+1}} := \left(1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right) \frac{n^2}{n^2-1} (A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t)$ with maximum error δ;

return "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$";

Theorem

Für eine kompakte konvexe Menge $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, die durch ein Separationsorakel gegeben ist, findet die ELLIPSOID-METHODE entweder einen Vektor $x \in K$ oder gibt die Meldung "$\mathrm{vol}(K) \leq \epsilon$" aus. Sie benötigt $O\left(n\left(n \ln R + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Iterationen, und in jeder Iteration werden ein Orakelaufruf, die approximative Berechnung einer Quadratwurzel und $O(n^2)$ arithmetische Operationen auf $O\left(n\left(n \ln R + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Bits ausgeführt.

□

Die Ellipsoid-Methode für die Lineare Programmierung

Satz

Sei $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$. Für $R = 1 + 2^{4n(\text{size}(A)+\text{size}(b))}$ und $\epsilon = \left(2n2^{4n(\text{size}(A)+\text{size}(b))}\right)^{-1}$ sei $P_{R,\epsilon} = \{x \in [-R,R]^n \mid Ax \le b + \epsilon \mathbb{1}\}$. Dann:

(a) $P = \emptyset \Leftrightarrow P_{R,\epsilon} = \emptyset$.

(b) Falls $P \neq \emptyset$, dann $\text{vol}(P_{R,\epsilon}) \ge \left(\frac{2\epsilon}{n2^{\text{size}(A)}}\right)^n$.

Theorem

Zu einem gegebenen Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ kann man in polynomieller Zeit entscheiden, ob P leer ist.

Theorem

Zu einem gegebenen Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ kann man in polynomieller Zeit entscheiden, ob P leer ist.

Beweis: Setze

- $R' = 1 + 2^{4n(\text{size}(A)+\text{size}(b))}$,
- $\epsilon = \left(2n2^{4n(\text{size}(A)+\text{size}(b))}\right)^{-1}$ und
- $\epsilon' = \left(\frac{2\epsilon}{n2^{\text{size}(A)}}\right)^n$

Wende die ELLIPSOID-METHODE an (mit Startradius $R = \lceil \sqrt{n} R' \rceil$ und ϵ' als untere Schranke für das Volumen), um zu testen, ob $K = P_{R',\epsilon}$ leer ist.
$\Rightarrow$ Damit wird auch überprüft, ob P leer ist.

Und: Wir brauchen $N(R, \epsilon') = O(n(n \ln(R) + \ln(\frac{1}{\epsilon'})))$ Iterationen
$\Rightarrow$ Polynomielle Zahl von Iterationen.

Und: Es reicht den absoluten Rundungsfehler auf einen Wert mit
$\delta < \left(2^{6(N(R,\epsilon')+1)} 16 n^3\right)^{-1}$ zu beschränken.
$\Rightarrow$ Polynomiell viele Bits in den Zahldarstellungen.

$\square$

Theorem

Es gibt einen Polynomzeit-Algorithmus, der zu einem gegebenen LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{Q}^n$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ eine Optimallösung findet, wenn eine solche existiert.

Beweis: Seien die Ungleichungen in $Ax \leq b$ mit $a_i^t x \leq b_i$ gegeben (mit $a_i \in \mathbb{Q}^n$, $b_i \in \mathbb{Q}$ für $i = \{1, \ldots, m\}$)

Überprüfe zunächst, ob das System zulässig ist.

wenn nicht, sind wir fertig.

sonst führe für $i = 1, \dots, m$ die folgenden Schritte aus:

Ersetze $a_i^t x \leq b_i$ durch $a_i^t x = b_i$

wenn das neue System zulässig bleibt, behalte diese Ersetzung bei,

sonst streiche die Ungleichung aus dem System

Am Ende erhält man ein zulässiges

System von Gleichungen, und jede Lösung des Gleichungssystems ist auch eine Lösung von $Ax \leq b$.

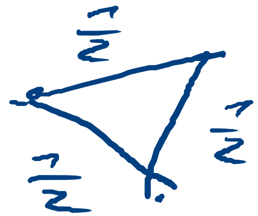
Löse das Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren.

Wir wissen aber, dass, wenn man primales und duales LP kombiniert, ein Vektor im Lösungsraum dieses kombinierten LP schon eine Optimallösung des primalen und eine Optimallösung des dualen LPs enthält. $\square$

Separation und Optimierung

Problem: In manchen Fällen ist ein LP durch exponentiell viele Nebenbedingungen gegeben.

Beispiel: Betrachte das MATCHING-PROBLEM: Gegeben sei ein ungerichteter Graph G, gesucht ist eine Menge $M \subseteq E(G)$ mit $|\delta_G(v) \cap M| \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.



ILP-Formulierung:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{e \in E(G)} x_e & & & \\
 & \sum_{e \in \delta_G(v)} x_e & \leq & 1 & v \in V(G) \\
 & x_e & \in & \{0,1\} & e \in E(G)
\end{array}
$$

Bei der LP-Relaxierung darf man folgende Nebenbedingungen einfügen:

$$
\sum_{e \in E(G[U])} x_e \leq \frac{|U|-1}{2} \qquad U \subseteq V(G), |U| \text{ ungerade}
$$

$\Rightarrow$ LP-Relaxierung des Matching-Problems kann so aussehen:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{e \in E(G)} x_e & & & \\
 & \sum_{e \in \delta_G(v)} x_e & \leq & 1 & v \in V(G) \\
 & \sum_{e \in E(G[U])} x_e & \leq & \frac{|U|-1}{2} & U \subseteq V(G), |U| \text{ ungerade} \\
 & x_e & \geq & 0 & e \in E(G)
\end{array}
$$

Betrachte ab jetzt abgeschlossene konvexe Mengen K, für die es Zahlen r und R mit $0 < r < \frac{R}{2}$ gibt, sodass $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$. Solche Mengen heißen r-R-**sandwiched Mengen**.

Wir betrachten das **schwache Optimierungsproblem**: Zu einer gegebenen Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ und einem Vektor $c \in \mathbb{Q}^n$ suchen wir ein $x \in K$ mit $c^t x \geq \max\{c^t z \mid z \in K\} - \epsilon$.

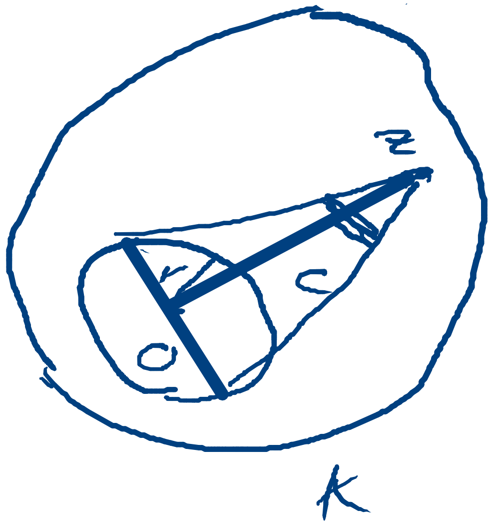
Lemma

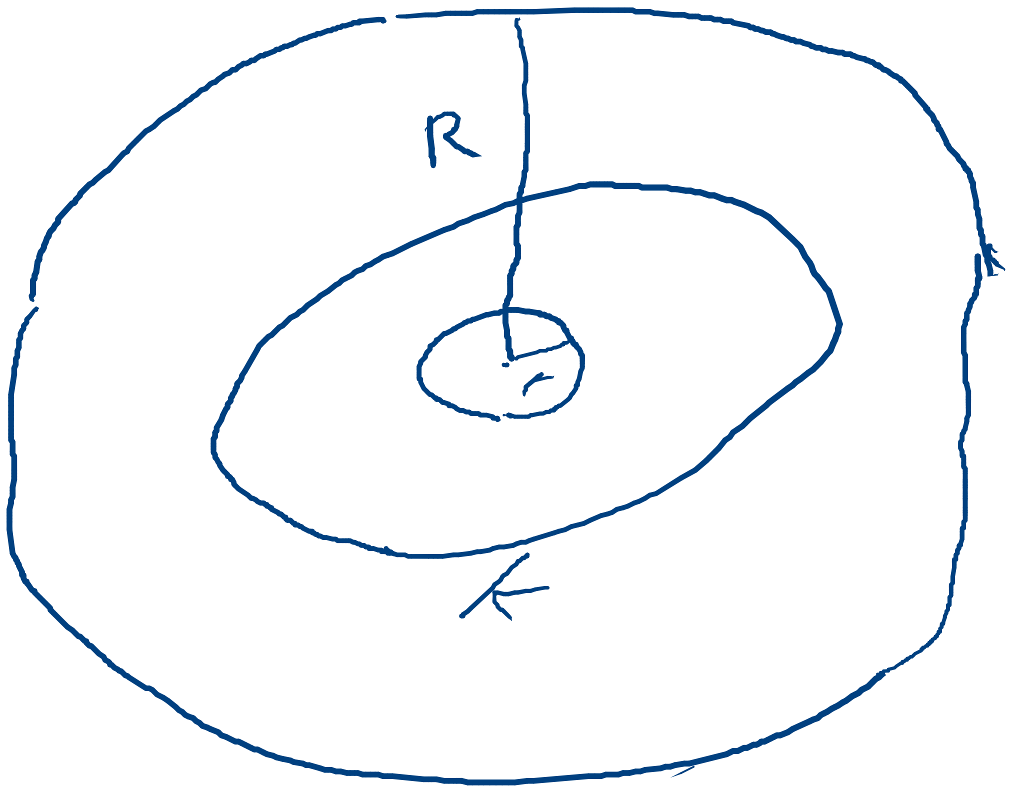
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine r-R-sandwiched konvexe Menge, $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta = \sup\{c^t x \mid x \in K\}$ und $0 < \epsilon < \delta$. Außerdem sei $U = \{x \in K \mid c^t x \geq \delta - \epsilon\}$. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(U) \geq \left(\frac{\epsilon}{2\|c\|R}\right)^{n-1} r^{n-1} \frac{1}{n^n} \frac{\epsilon}{2\|c\|} \frac{1}{n}.$$

Beweis: Übung $\square$

$z \in K, \quad c^t z \geq \delta - \frac{\varepsilon}{2}$




R
r

Satz

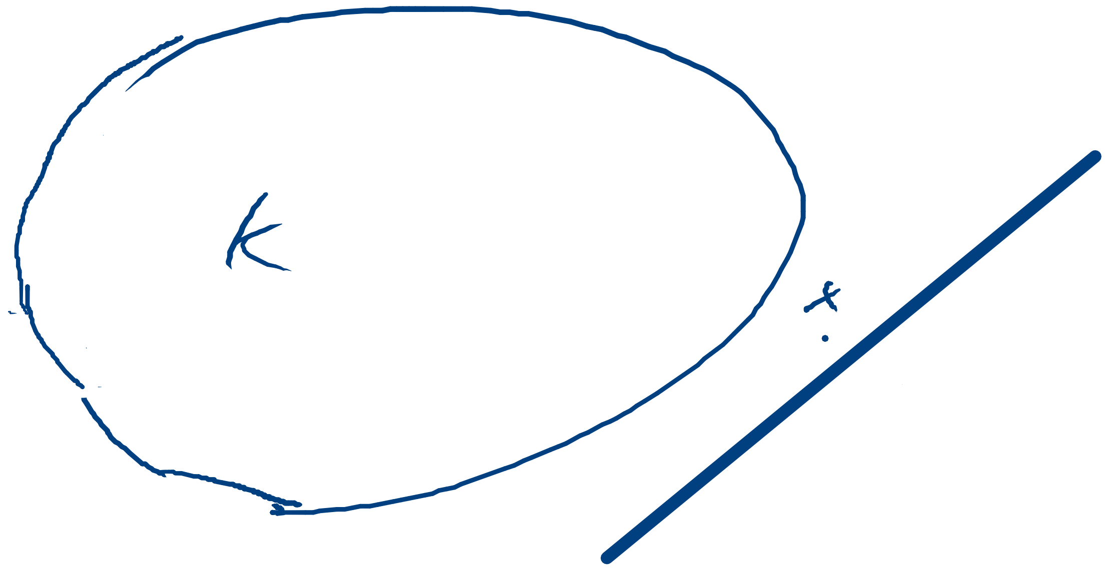
Gegeben sei ein Separationsorakel für eine r-R-sandwiched konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Laufzeit polynomiell in size(R), size(r) und size(x) (wobei x der Eingabevektor für das Orakel sei), eine Zahl $\epsilon > 0$ und ein Vektor c. Dann gibt es einen polynomiellen Algorithmus (bezüglich *size*(R), *size*(r), size(c) und *size*(ϵ)), der einen Vektor $v \in K$ mit $c^t v \geq \sup\{c^t x \mid x \in K\} - \epsilon$ berechnet.

<u>Beweis:</u> Wende die Ellipsoid-Methode auf die Menge aller fast-optimalen Elemente von K an. Das vorige Lemma garantiert, dass das Volumen der Menge

dieser Vektoren nicht beliebig klein sein kann. $\square$

Ein **schwaches Separationsorakel** für eine konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Algorithmus, der zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ und η mit $0 < \eta < \frac{1}{2}$ entweder "$x \in K$" ausgibt oder einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ findet mit $v^t z \leq 1$ für alle $z \in K$ und $v^t x \geq 1 - \eta$.

Notation: Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$.


K
x

Theorem

Wenn es einen Algorithmus mit Laufzeit polynomiell in size(r) und size(R) gibt, der lineare Zielfunktionen über einer abgeschlossenen konvexen r-R-sandwiched Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ maximiert, dann gibt es ein schwaches Separationsorakel für K, dessen Laufzeit polynomiell in size(r), *size*(R) und *size*(η) ist.

Beweis: Behauptung: $K^{**} = K$

Beweis des Behauptung:

"$\supseteq$:" Für $x \in K$ gilt: $y^t x \leq 1$ für alle $y \in K^*$. $\Rightarrow x \in K^{**}$.

"$\subseteq$:" Sei $z \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Und sei $w \in K$ ein Vektor, sodass $\|z - w\|$ minimal unter allen Vektoren in K ist.

Sei $u = z - w$. Dann gilt $u^t x \leq u^t w < u^t z$ für alle $x \in K$.

Und, weil $0 \in K$, gilt $u^t w \geq 0$.

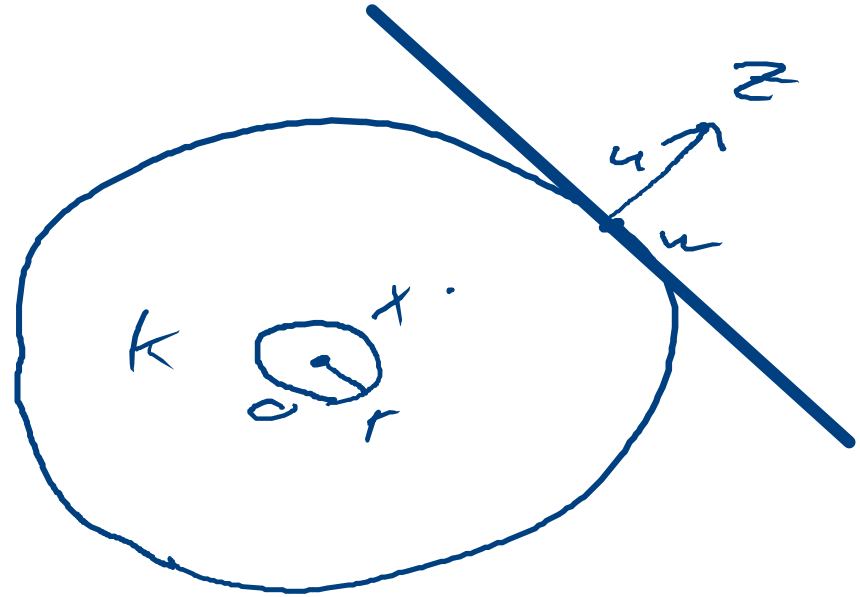
Nach Skalierung von u können wir $u^t z > 1$ und $u^t x \leq 1$ für alle $x \in K$ annehmen.

Daher gilt $u \in K^*$ und $u^t z > 1$

$\Rightarrow z \notin K^{**}$.

$\Rightarrow K^{**} \subseteq K$.

$\Rightarrow$ Behauptung.



z
u
w
K
x
o
r

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ eine Instanz für das schwache Separationsorakel

Falls $x = 0 \Rightarrow x \in K$

Falls $\|x\| \geq R$, dann können wir

$v = \frac{x}{\|x\|}$ wählen

$\Rightarrow$ können annehmen: $0 < \|x\| < R$

Wir können das (starke) Separations-Problem für K^* lösen (Übung)

K^* ist eine abgeschlossene $\frac{1}{R}$ - $\frac{1}{r}$ -sandwichte Menge. $\Rightarrow$ wir können das schwache Optimierungsproblem für K^* mit $c = \frac{x^t}{\|x\|}$ und $\varepsilon = \frac{\eta}{R}$ in polynomieller Zeit lösen.

$\Rightarrow$ wir erhalten einen Vektor $v_0 \in K^*$ mit $\frac{x^t}{\|x\|} v_0 \geq \max\{\frac{x^t}{\|x\|} v : v \in K^*\} - \frac{\eta}{R}$

Falls $\frac{x^t}{\|x\|} v_0 \geq \frac{1}{\|x\|} - \frac{\eta}{R}$, dann $v_0^t x \geq 1 - \eta \frac{\|x\|}{R} \geq 1 - \eta$ und $v_0^t z \leq 1$ für alle $z \in K$ (wegen $v_0 \in K^*$)

Sonst gilt $\max \left\{ \frac{x^t}{\|x\|} v : v \in K^* \right\}$

$$\leq \frac{1}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \max \{ x^t v : v \in K^* \} \leq 1$$

$$\Rightarrow x \in K^{**} \Rightarrow x \in K \qquad \square$$