Satz

Die Gauss-Elimination hat polynomielle Laufzeit. $\square$

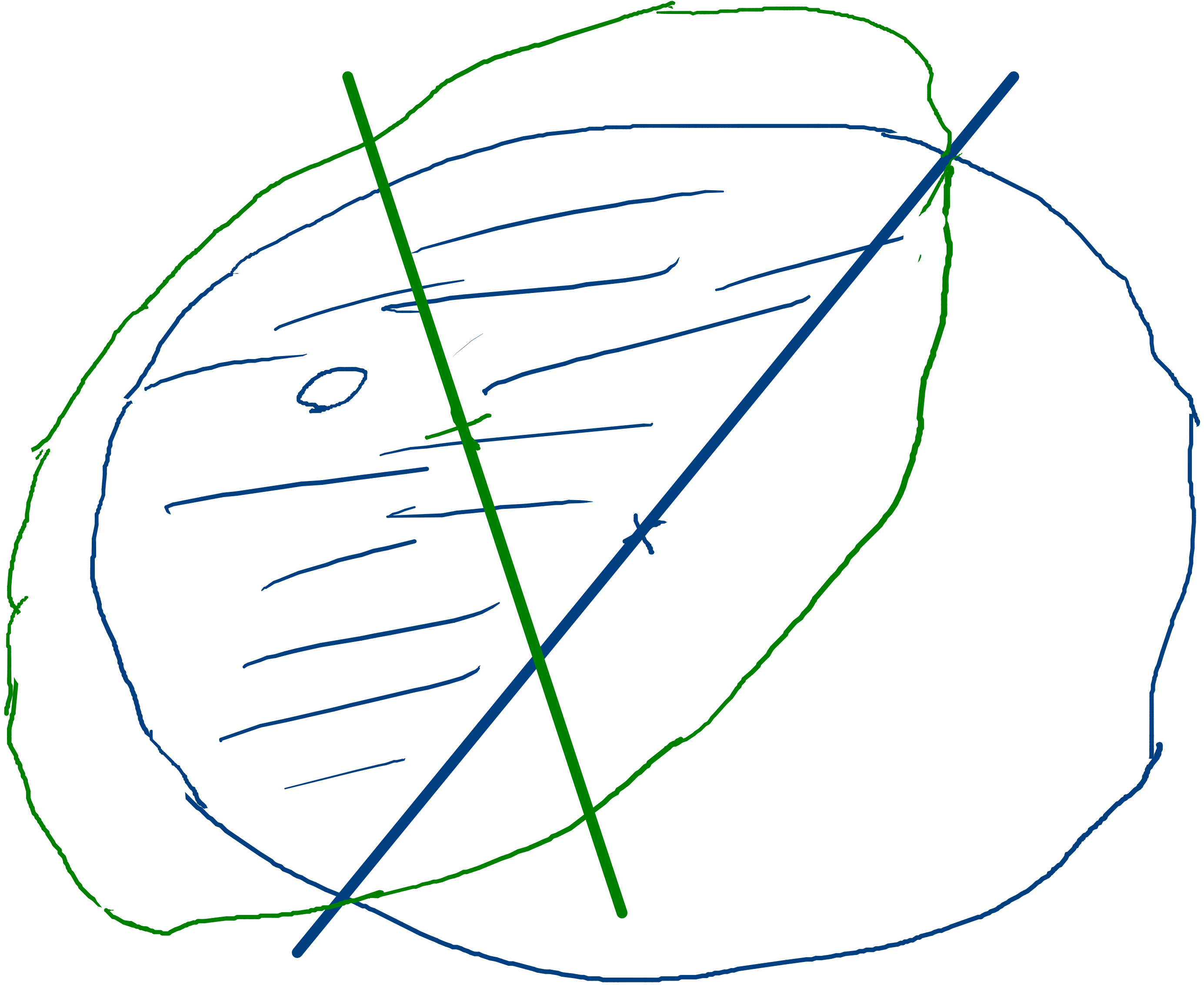
$\Rightarrow$ Folgende Problem können in polynomieller Laufzeit gelöst werden:

- Das Lösen eine Gleichungssystems.
- Die Berechnung der Determinante einer Matrix.
- Die Berechnung des Rangs einer Matrix.
- Die Invertierung einer regulären Matrix.
- Die Überprüfung, ob eine Menge von rationalen Vektoren linear unabhängig ist.

Die Ellipsoid-Methode

Ellipsoid-Methode

- Erster Algorithmus zur LP-Lösung mit beweisbar polynomieller Laufzeit.
- Entwickelt von Khachiyan [1979].
- Entscheidet in der Grundversion nur, ob ein Polyeder leer ist oder nicht.
- Kann auch benutzt werden, ohne dass alle Nebenbedingungen explizit aufgelistet werden.
- Auch geeignet für andere (nicht-lineare) Optimierungsprobleme.



Definition:

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist ein **Ellipsoid**, wenn es einen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ und eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$E = \{Mx + s \mid x \in B^n\},$$

wobei $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel ist.

Kurznotation: $E = s + MB^n$.

Definition

Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv definit**, wenn $x^t A x > 0$ für jeden Nicht-Null-Vektor x gilt. Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn $x^t A x \geq 0$ für jeden Vektor x gilt.

Bemerkung: Eine $n \times n$-Matrix Q ist genau dann positiv definit, wenn es eine nicht-singuläre Matrix M mit $Q = MM^t$ gibt (hier ohne Beweis, siehe auch Skript).

Lemma

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Ellipsoid, wenn es eine symmetrische positiv definite $n \times n$-Matrix Q und einen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ mit $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - s)^t Q^{-1} (x - s) \leq 1\}$ gibt.

<u>Beweis</u>: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau Ellipsoid, wenn es eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$E = \{ Mx + s : x \in B^n \}$$

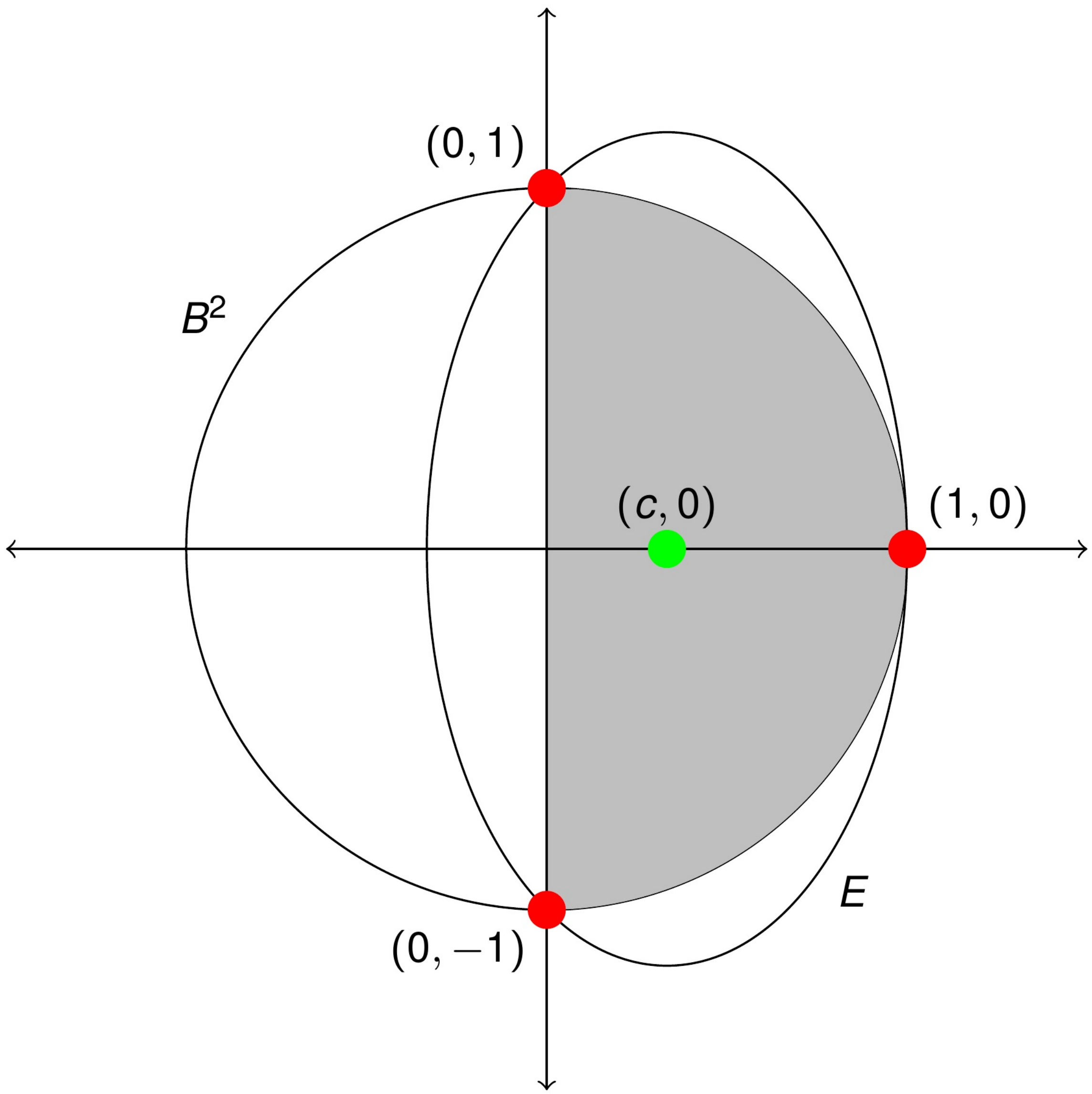
$$= \{ y \in \mathbb{R}^n : M^{-1}(y-s) \in B^n \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R}^n : (y-s)^t (M^{-1})^t M^{-1}(y-s) \leq 1 \}$$

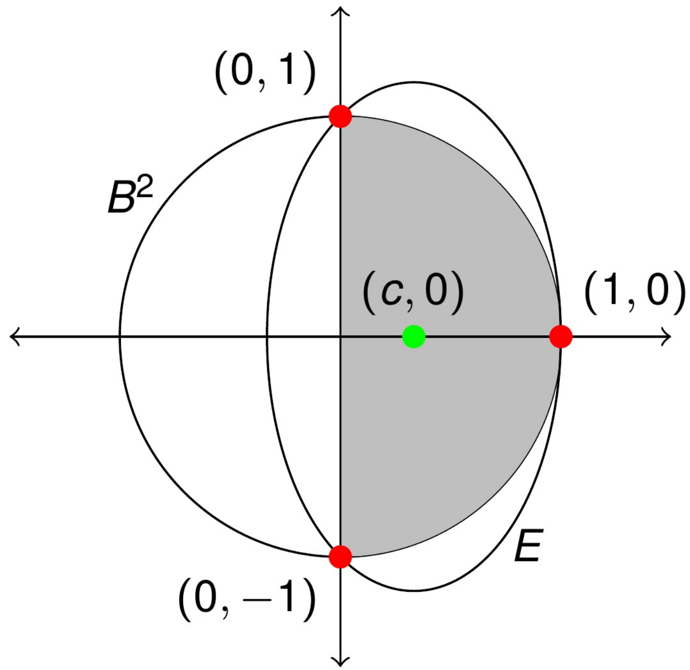
Das ist äquivalent zur Existenz einer positiv definiten Matrix Q mit $E = \{ y \in \mathbb{R}^n : (y-s)^t Q^{-1} (y-s) \leq 1 \}$

$\square$

Erstes Ziel: Finde ein Ellipsoid mit kleinstem Volumen, das eine Halbkugel der Einheitskugel B^n enthält.



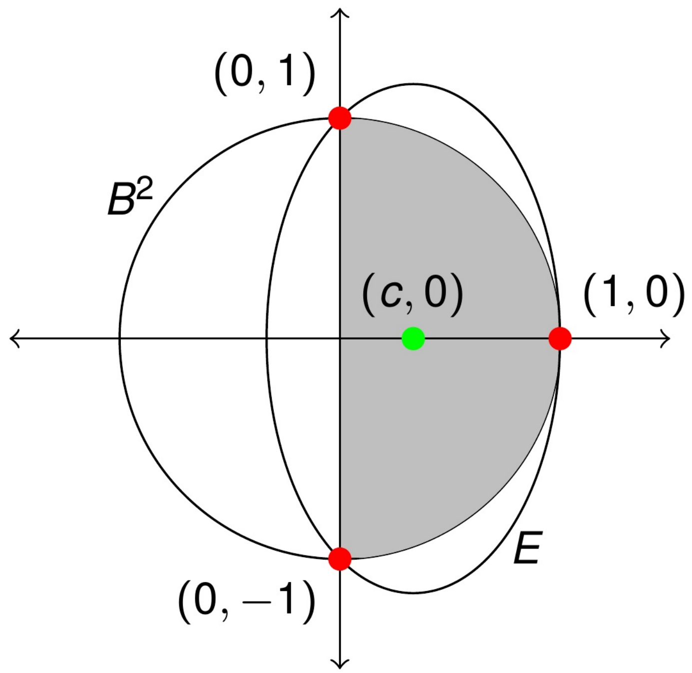
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & & 0 \\ & \beta^2 & \\ 0 & & \beta^2 \end{pmatrix}$$



Ansatz: Wähle als Mittelpunkt des Ellipsoid eine Position $c \cdot e_1$.
Kandidaten für das Ellipsoid sind:

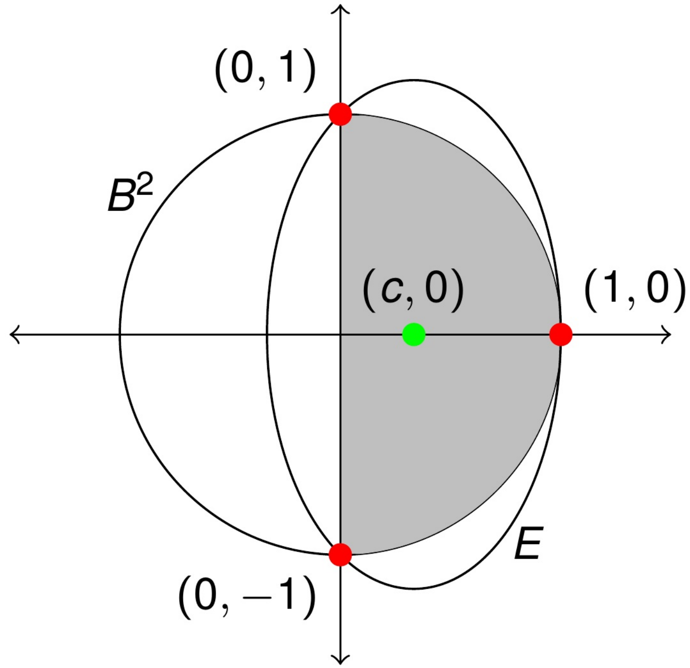
$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2(x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

α, β und c sind zu bestimmen.



$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2 (x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

Aussage aus der Maßtheorie:Das Volumen eines Ellipsoids
$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - s)^t Q^{-1} (x - s) \leq 1\}$ ist $\mathrm{vol}(E) = \sqrt{\det(Q)} \times \mathrm{vol}(B^n)$
(Beweis: siehe Verweis im Skript).
$\Rightarrow$ Minimiere $\sqrt{\det(Q)} = \alpha^{-1} \beta^{-(n-1)}$.

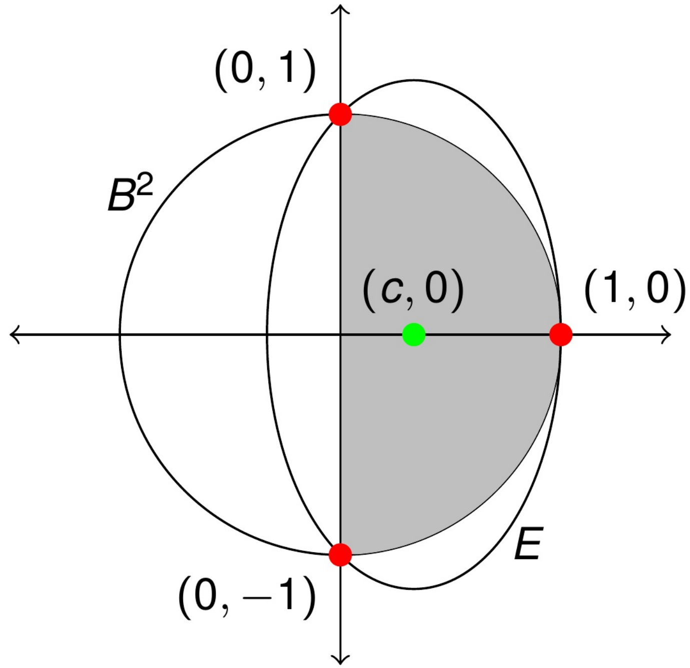


$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2(x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

Wunsch 1: e_1 soll auf dem Rand von E liegen.

$\Rightarrow$: Fordere $\alpha^2(1-c) = 1$ bzw.:

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{1}{(1-c)^2}}$$



$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2 (x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \le 1 \right\}$$

Wunsch 2: Die Punkte auf $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$, die auf dem Rand von B^n liegen, sollen auf dem Rand von E liegen.

$\Rightarrow$: Fordere $\alpha^2 c^2 + \beta^2 = 1$ und somit:

$$\boxed{\beta^2 = 1 - \alpha^2 c^2 = 1 - \frac{c^2}{(1-c)^2} = \frac{1-2c}{(1-c)^2}.}$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2 (x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

Minimiere $\det(Q) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\beta^{2n-2}}$ mit

$$\alpha^2 = \frac{1}{(1-c)^2}$$

und

$$\beta^2 = \frac{1-2c}{(1-c)^2}.$$

$\Rightarrow$ Minimiere $\frac{(1-c)^{2n}}{(1-2c)^{n-1}}$

Minimiere $\frac{(1-c)^{2n}}{(1-2c)^{n-1}}$

$$\frac{d}{dc}\frac{(1-c)^{2n}}{(1-2c)^{n-1}} = \frac{2(n-1)(1-c)^{2n}}{(1-2c)^{n}} - \frac{2n(1-c)^{2n-1}}{(1-2c)^{n-1}}$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\frac{2(n-1)(1-c)}{1-2c} = 2n$
$\Rightarrow$ Wollen $2(n-1) - 2c(n-1) = 2n - 4cn$ und $c(2n-(n-1)) = 1$.
$\Rightarrow$ Setze $c = \frac{1}{n+1}$.
$\Rightarrow$ $\alpha^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2}$ und $\beta^2 = \frac{n^2-1}{n^2}$.

Lemma (Halbkugel-Lemma)

$$B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\} \quad \subseteq \quad E$$

mit

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(x_1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n^2-1}{n^2}\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Außerdem: $\frac{\mathrm{vol}(E)}{\mathrm{vol}(B^n)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Beweis: Sei $x \in B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$

Es gilt $\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 - x_1^2$

$\Longrightarrow$ Es reicht zu zeigen:

$$g(x_1) := \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(x_1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n^2-1}{n^2}(1 - x_1^2) \leq 1$$

für $x_1 = 0$ gilt

$$g(0) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\,\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n^2-1}{n^2} = 1$$

für $x_1 = 1$:

$$g(1) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

g ist eine quadratische Funktion und der Koeffizient von x_1^2 ist

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{n^2-1}{n^2} > 0$$

$\Rightarrow g$ konvex $\Rightarrow g(x_1) \leq 1$ für $x_1 \in [0,1]$.

Volumen:

Es gilt $\frac{vol(E)}{vol(B^n)} = \sqrt{\det(Q)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta^{(n-1)}}$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\leq e^{-\frac{1}{n+1}} e^{\frac{n-1}{2(n^2-1)}} = e^{-\frac{1}{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{2(n+1)}} = e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$$

$\uparrow$ $1+x \leq e^x$ für $x \in \mathbb{R}$

$\square$

Lemma (Halb-Ellipsoid-Lemma)

Sei $E = p + \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q^{-1} x \leq 1\}$ ein Ellipsoid und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a^t Qa = 1$. Dann gilt

$$E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \subseteq E'$$

mit

$$E' = p + \frac{1}{n+1} Qa + \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(Q^{-1} + \frac{2}{n-1} aa^t \right) x \leq 1 \right\}.$$

Und: $\frac{\text{vol}(E')}{\text{vol}(E)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Beweis:

Sei M eine reguläre $n \times n$-Matrix mit $Q = MM^t$. O.B.d.A: $a^t M = e_1^t$ und somit $Qa = MM^t a = M(a^t M)^t = Me_1$ (sonst multipliziere M mit einer Rotationsmatrix, die $a^t M$ auf e_1 abbildet). Dann:

$$\begin{aligned}
& E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \\
= \;& (p + MB^n) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \\
= \;& p + (MB^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t (x+p) \geq a^t p\}) \\
= \;& p + (MB^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq 0\}) \\
= \;& p + M(B^n \cap M^{-1}\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq 0\}) \\
= \;& p + M(B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t Mx \geq 0\}) \\
\text{Halbkugel-} = \;& p + M(B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid e_1^t x \geq 0\}) \\
\text{Lemma} \rightarrow \subseteq \;& p + \frac{1}{n+1} Me_1 + M\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(I_n + \frac{2}{n-1} e_1 e_1^t\right) x \leq 1\right\} \\
= \;& p + \frac{1}{n+1} Me_1 + \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} (M^{-1}x)^t \left(I_n + \frac{2}{n-1} e_1 e_1^t\right) M^{-1}x \leq 1\right\} \\
= \;& p + \frac{1}{n+1} Qa + \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(Q^{-1} + \frac{2}{n-1} aa^t\right) x \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = e_1 e_1^t$$

$$\frac{n^2-1}{n^2}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$