Vollständige Unimodularität

Theorem (Hoffman und Kruskal)

Ein ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Beweis: A ist genau dann TU, wenn $\left[I_m \; A\right]$ unimodular ist.
Sei b ein ganzzahliger Vektor.
$\Rightarrow$ Die Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ sind genau dann ganzzahlig, wenn die Ecken von $\{z \in \mathbb{R}^{m+n} \mid \left[I_m \; A\right] z = b, z \geq 0\}$ ganzzahlig sind.
Die Aussage folgt aus dem vorigen Theorem. $\square$

Vollständige Unimodularität

•

Theorem

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann vollständig unimodular, wenn für alle ganzzahligen Vektoren b und c die Optima für beide Seiten der Dualitäts-Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$$

von ganzahligen Vektoren angenommen wird (wenn beide Optima existieren).

Beweis: Folgt direkt aus Hoffmans and Kruskals Theorem.
Denn A ist genau dann TU, wenn A^t TU ist. □

Vollständige Unimodularität

Korollar

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn das Ungleichungssystem $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Vollständige Unimodularität

Korollar

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn das Ungleichungssystem $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Beweis:
"$\Rightarrow$:" Wenn A TU, dann ist A^t TU.
Hoffmans und Kruskals Theorem: $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ wird für jeden Vekor b und jeden ganzzahligen Vektor c, für die das Minimum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.
$\Rightarrow$ $Ax \leq b, x \geq 0$ ist für jeden Vektor b TDI.

Vollständige Unimodularität

Korollar

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn das Ungleichungssystem $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$:" Wenn A TU, dann ist A^t TU.
Hoffmans und Kruskals Theorem: $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ wird für jeden Vekor b und jeden ganzzahligen Vektor c, für die das Minimum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.
$\Rightarrow$ $Ax \leq b, x \geq 0$ ist für jeden Vektor b TDI.

"$\Leftarrow$:" Es sei $Ax \leq b, x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI.
$\Rightarrow$ Das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ist für jeden ganzzahligen Vektor b ganzzahlig.
Mit Hoffmans und Kruskals Theorem folgt, dass A TU ist. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem (Ghoulia-Houri)

Ein Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist genau dann TU, wenn für es jede Menge $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ Mengen R_1 und R_2 mit $R = R_1 \dot\cup R_2$ gibt, sodass für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\sum_{j \in R_1} a_{ij} - \sum_{j \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}.$$

Vollständige Unimodularität

Beweis:

"$\Rightarrow$:" Sei A TU und $R \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Definiere $d \in \{0,1\}^n$ durch

$$d_r = \begin{cases} 1 & \text{for } r \in R \\ 0 & \text{for } r \in \{1, \ldots, n\} \setminus R \end{cases}$$

A ist TU. $\Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{pmatrix}$ ist TU.

$\Rightarrow$ Das Polytop

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \left\lceil \frac{1}{2} Ad \right\rceil, Ax \geq \left\lfloor \frac{1}{2} Ad \right\rfloor, x \leq d, x \geq 0 \right\}$$

ist ganzzahlig.

Wegen $\frac{1}{2} d \in P$ gilt $P \neq \emptyset$.

Sei z eine ganzzahlige Ecke von P.

Vollständige Unimodularität

Beweis (Fortsetzung):

$\Rightarrow$ Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq \left\lceil \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j \right\rceil \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j \right\rfloor \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j .$$

$\Rightarrow$ $-1 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(d_j - 2z_j) \leq 1$.

Definiere $R_1 := \{r \in R \mid z_r = 0\}$ und $R_2 := \{r \in R \mid z_r = 1\}$.
Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ folgt

$$\sum_{j \in R_1} a_{ij} - \sum_{j \in R_2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(d_j - 2z_j) \in \{-1, 0, 1\}$$

Vollständige Unimodularität

Beweis (Fortsetzung):
"$\Leftarrow$:" Annahme: Für jede Menge $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ gibt es Mengen $R_1, R_2 \subseteq R$ mit $R = R_1 \dot{\cup} R_2$ wie im Theorem.
Zeige induktiv in k: Jede $k \times k$-Untermatrix von A hat Determinante -1, 0 oder 1.
Für $k = 1$ folgt das aus der Voraussetzung für $|R| = 1$.
Sei $k > 1$, und sei $B = (b_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,k\}}$ eine Untermatrix von A.
O.B.d.A: B ist regulär.
Cramersche Regel: Jeder Eintrag von B^{-1} ist $\frac{\det(B')}{\det(B)}$, wobei B' aus B entstehe, indem ein Spalte durch einen Einheitsvektor ersetzt wird.
Induktionsvoraussetzung: $\det(B') \in \{-1, 0, 1\}$.
$\Rightarrow$ Alle Einträge von $B^* := (\det(B))B^{-1}$ sind in$\{-1, 0, 1\}$.
Sei b^* die erste Spalte von B^*.
$\Rightarrow$ $Bb^* = \det(B)e_1$ (e_1: erster Einheitsvektor).
Definiere $R := \{j \in \{1, \dots, k\} \mid b^*_j \neq 0\}$.
Für $i \in \{2, \dots, k\}$ gilt $0 = (Bb^*)_i = \sum_{j \in R} b_{ij} b^*_j$, daher ist $|\{j \in R \mid b_{ij} \neq 0\}|$ gerade.

$$B' : \begin{bmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ X & 1 & X \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

Vollständige Unimodularität

Beweis (Fortsetzung):
Sei $R = R_1 \dot\cup R_2$, sodass $\sum_{j \in R_1} b_{ij} - \sum_{j \in R_2} b_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
$\Rightarrow$ Für $i \in \{2, \ldots, k\}$ gilt (weil $|\{j \in R \mid b_{ij} \neq 0\}|$ gerade ist):
$\sum_{j \in R_1} b_{ij} - \sum_{j \in R_2} b_{ij} = 0$.
Wenn außerdem $\sum_{j \in R_1} b_{1j} - \sum_{j \in R_2} b_{1j} = 0$ wäre, dann wären die Spalten von B nicht linear unabhängig.
$\Rightarrow \sum_{j \in R_1} b_{1j} - \sum_{j \in R_2} b_{1j} \in \{-1, 1\}$ und daher gilt $Bx \in \{e_1, -e_1\}$, wobei der Vektor $x \in \{-1, 0, 1\}^k$ definiert sei durch:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{for } j \in R_1 \\ -1 & \text{for } j \in R_2 \\ 0 & \text{for } j \in \{1, \ldots, k\} \setminus R \end{cases}$$

$\Rightarrow b^* = \det(B) B^{-1} e_1 \in \{\det(B)x, -\det(B)x\}$.
Aber b^* und x sind Nicht-Null-Vektoren nur mit Einträgen -1,0,1.
$\Rightarrow \det(B) \in \{-1, 1\}$. $\square$

Beispiele: Inzidenzmatrizen

Die **Inzidenzmatrix** eines ungerichteten Graphen G ist die Matrix $A_G = (a_{v,e})_{\substack{v \in V(G) \\ e \in E(G)}}$ mit

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in e \\ 0, & \text{if } v \notin e \end{cases}$$

Die **Inzidenzmatrix** eines gerichteten Graphen G ist die Matrix $A_G = (a_{v,e})_{\substack{v \in V(G) \\ e \in E(G)}}$ mit

$$a_{v,(x,y)} = \begin{cases} -1, & \text{if } v = x \\ 1, & \text{if } v = y \\ 0, & \text{if } v \notin \{x, y\} \end{cases}$$

Vollständige Unimodularität

Theorem

Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen G ist genau dann TU, wenn G bipartit ist.

Theorem

Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist TU.

Beweis: ungerichteter Fall:

Sei G ein ungerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A_G.

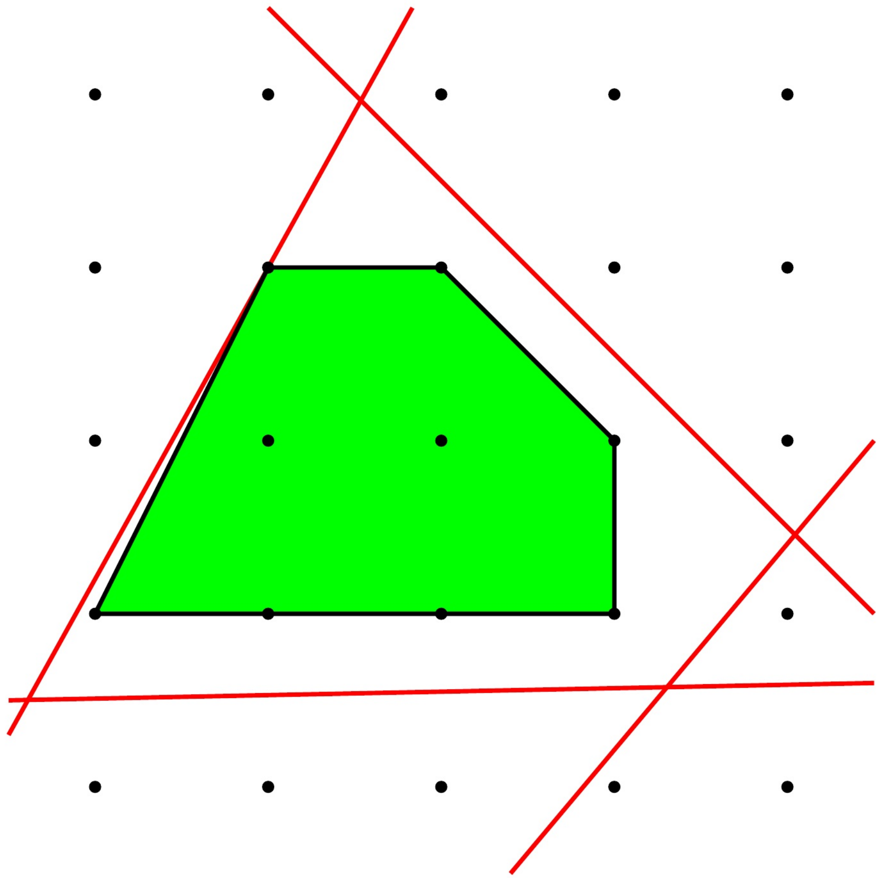
wende das Kriterium des vorigen Satzes auf die Zeilen von A_G an.

Dann gilt: A_G ist genau dann TU, wenn es für jede Menge $X \subseteq V(G)$ eine Aufteilung $X = A \dot\cup B$ mit $E(G[A]) = E(G[B]) = \emptyset$. Das ist äquivalent dazu, dass G bipartit ist.

Gerichteter Fall: Wende das vorige Theorem auf die Zeilen einer Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen G an. Für jede Zeilenmenge R können wir $R_1 = R$ und $R_2 = \emptyset$ setzen. $\square$

Schnittebenen-Verfahren

Schnittebenen-Verfahren



Definition

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Sei M die Menge aller rationaler Halbräume $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ mit $P \subseteq H$. Definiere

$$P' := \bigcap_{H \in M} H_I.$$

Setze $P^{(0)} := P$ und $P^{(i+1)} := \left(P^{(i)}\right)'$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $P^{(i)}$ ist die i-te **Gomory-Chvátal-Stutzung** (**Gomory-Chvátal-truncation**) von P.

Beobachtung: Es gilt $P \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq P_I$ für jedes rationale Polyeder P.
Also: falls $P = P_I$, dann $P = P' = P_I$

<u>Beispiel:</u> $P = \operatorname{conv}(\{(0,0),(0,1),(1,\frac{1}{2})\})$

Für jeden Halbraum H, der P enthält, gilt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in H_I$

$\Longrightarrow P_I \neq P'$

Lemma

Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ ein rationaler Halbraum, sodass die Komponenten von c ~~teilerfremd~~ sind. Dann gilt $H_I = H' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \lfloor \delta \rfloor\}$.

teilerfremde ganze Zahlen

Beweis: Es gilt offenbar: $H_I \subseteq H' = \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x \leq \lfloor \delta \rfloor\}$

Zu zeigen: $\{x \in \mathbb{R}^n : c^t x \leq \lfloor \delta \rfloor\} \subseteq H_I$

•

Reicht zu zeigen: Jeder Vektor $x^* \in \mathbb{Q}^n$ mit $c^t x \leq \lfloor \delta \rfloor$ liegt in H_I.

Wissen: $\{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \lfloor \delta \rfloor\}$ enthält einen ganzzahligen Vektor, weil die Einträge von c teilerfremd sind (folgt aus Korollar 75 im Skript).

Sei y ein ganzzahliger Vektor in $\{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \lfloor \delta \rfloor\}$

Sei: $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass αx^* ganzzahlig ist.

$$\Rightarrow x^* = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha x^* - (\alpha - 1) y\right) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} y$$

Es gilt $c^t(\alpha x^* - (\alpha - 1) y) \leq c^t y = \lfloor \delta \rfloor$

$$\Rightarrow x^* \in H_I$$

$\Leftrightarrow$

$\alpha c^t x^* \leq \lfloor \delta \rfloor$

$\alpha c^t y = \lfloor \delta \rfloor$

Schnittebenen-Verfahren

Satz

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Dann gilt

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor \text{ für alle } u \geq 0 \text{ mit } u^t A \text{ ganzzahlig}\}.$$