Facetten

Theorem

Es sei $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ ein nicht-leeres Polyeder der Dimension $n - \text{rank}(A)$. Es sei $A'x \leq b'$ ein kleinstes Ungleichungssystem, sodass $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A'x \leq b'\}$. Dann ist jede Ungleichung in $A'x \leq b'$ facettenbestimmend für P und jede Facette von P wird durch eine Ungleichung von $A'x \leq b'$ gegeben.

Korollar

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder.

(a) Jede Fläche F von P mit $F \neq P$ ist der Schnitt von Facetten von P.

(b) Die Dimension jeder Facette von P ist $\dim(P) - 1$. $\square$

<u>Bemerkung:</u> Insbesondere liefern uns Polyederbeschreibungen mit facettenbestimmenden Ungleichungen kleinste Darstellungen.

Minimale Flächen

Minimale Flächen

Definition

Eine Fläche F eines Polyeders P heißt **minimale Fläche**, wenn es keine Fläche F' von P mit $F' \subsetneq F$ gibt.

Proposition

Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Eine nicht-leere Menge $F \subseteq P$ ist genau dann eine minimale Fläche von P, wenn es ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ mit $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$ gibt.

<u>Beweis</u>: „$\Longrightarrow$": Sei F eine minimale Fläche von P. $\Rightarrow$ Es gibt ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ mit $F = \{x \in P : A'x = b'\}$

Wähle $A'x \leq b'$ maximal mit dieser Eigenschaft. Sei $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ ein kleinstes Teilsystem von $Ax \leq b$ mit

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{A}x \leq \tilde{b},\ A'x = b'\}$$

Behauptung: $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ ist ein leeres Ungleichungssystem.

Beweis der Behauptung: Annahme: Es gebe eine Ungleichung $a^t x \leq \beta$ in $\tilde{A} x \leq \tilde{b}$.

Die Ungleichung $a^t x \leq \beta$ ist nicht redundant $\Longrightarrow$ $F' := \{x \in \mathbb{R}^n : A' x = b', \tilde{A} x \leq \tilde{b}, a^t x = \beta\}$

$\Rightarrow F'$ ist eine Facette von F

$\Longrightarrow F'$ ist eine Fläche von P

Wegen $F' \neq F$ ist F' also eine Fläche von P, die eine echte Teilmenge von F ist. Widerspruch zur Annahme, dass F eine minimale Fläche ist.

„$\Leftarrow$": Sei: $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\} \subseteq P$ für ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ mit $F \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$ F ist ein Polyeder, und F ist die einzige Fläche von F.

Und: $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\} = \{x \in P : A'x = b'\}$

$\Longrightarrow$ F ist eine Fläche von P.

$\Longrightarrow$ F ist eine minimale Fläche von P. $\square$

Korollar

Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Dann haben die minimalen Flächen von P Dimension $n - \text{rank}(A)$.

Beweis: Sei F eine minimale Fläche von $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.
$\Rightarrow$ F kann als $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$ geschrieben werden (für ein Teilsystem $A'x \leq b'$ of $Ax \leq b$). Können annehmen: keine Ungleichung in $Ax \leq b$ ist redundant.
Annahme: $\text{rank}(A') < \text{rank}(A)$.
$\Rightarrow$ Man kann eine weitere Nebenbedingung $a^t x \leq \beta$ aus $Ax \leq b$ zu $A'x \leq b'$ hinzufügen, sodass a^t von den Zeilen in A' lin. unabhängig ist. Dann ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b', a^t x = \beta\} \subsetneq F$ eine Fläche von F und somit auch eine von P. Widerspruch zur Minimalität von F.

$\Rightarrow$ $\text{rank}(A') = \text{rank}(A)$.
$\Rightarrow$ $\dim(F) = n - \text{rank}(A') = n - \text{rank}(A)$. $\square$

$$\begin{bmatrix} A' \\ a^t \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} b' \\ \beta \end{pmatrix}$$

Proposition

Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $x' \in P$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) x' ist eine Ecke von P.

(b) Es gibt ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ aus n Ungleichungen, sodass die Zeilen von A' linear unabhängig sind und $\{x'\} = \{x \in P \mid A'x = b'\}$ gilt.

(c) x' kann nicht als Konvexkombination von Vektoren in $P \setminus \{x'\}$ geschrieben werden.

(d) Es gibt keinen vom Nullvektor verschiedenen Vector $d \in \mathbb{R}^n$, für den $\{x' + d, x' - d\} \subseteq P$ gilt.

<u>Beweis:</u> "(a) $\Longleftrightarrow$ (b)": x' ist genau dann eine Ecke von P, wenn es ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ mit $\{x'\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$. Wegen $\underbrace{\dim(\{x'\})}_{=0}$ ist das äquivalent zu (b).

"(b) $\Rightarrow$ (c)" Sei $A'x \leq b'$ ein Teilsystem aus n Ungleichungen von $Ax \leq b$, sodass die Zeilen von A' linear unabhängig sind und $\{x'\} = \{x \in P : A'x = b'\}$

Annahme: x' kann als Konvexkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$ von Vektoren $x^{(i)} \in P \setminus \{x'\}$ geschrieben werden (also $\lambda_i \geq 0$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ und $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$). Wenn $a^t x^{(i)} < \beta$ für irgendeine Ungleichung $a^t x \leq \beta$ in $A' x \leq b'$ und $i \in \{1, \dots, k\}$ gelten würde, dann wäre

$$a^t x' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^t x^{(i)} < \beta. \quad ↯$$

$\Longrightarrow x^{(i)} \in \{x \in P : A' x = b'\} = \{x'\}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. $↯$

"(c) $\Rightarrow$ (d)" Wenn $\{x'+d, x'-d\} \subseteq P$, dann $x' = \frac{1}{2}((x'+d)+(x'-d))$. $\Rightarrow$ x' kann als Konvexkombination von Vektoren in $P \setminus \{x'\}$ geschrieben werden, falls $d = 0$.

"(d) $\Rightarrow$ (b)" Sei $A'x \leq b'$ ein maximales Teilsystem von $Ax \leq b$ mit $A'x' = b'$.

Annahme: In A' gebe es nicht n linear unabhängige Zeilenvektoren.

$\Rightarrow$ Es gibt einen Vektor d, der orthogonal zu allen Zeilen von A' steht.

$\Longrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $A'(x' + \varepsilon d)$

$= A'(x' - \varepsilon d) = b'$

Für jede Ungleichung $a^t x \leq \beta$, die in $Ax \leq b$ aber nicht in $A'x \leq b'$ liegt, gilt $a^t x' < \beta$

$\Longrightarrow$ Für hinreichend kleines ε erfüllen $x' + \varepsilon d$ und $x' - \varepsilon d$ auch alle diese Ungleichungen. $\Longrightarrow \{x' + \varepsilon d, x' - \varepsilon d\} \subseteq P$.

$\square$

Minimale Flächen

Definition

Ein Polyeder heißt **spitz** (pointed), wenn es leer ist oder alle seine minimalen Flächen Dimension 0 haben.

<u>Beispiele:</u> • Polytope sind spitz.

Bew.: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ ein Polytop. Falls rank$(A) < n$, dann gibt es einen Vektor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\tilde{x} = 0$
$\Rightarrow$ Für jedes $x \in P$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt $x + k \cdot \tilde{x} \in P$. Widerspruch zur Annahme, dass P beschränkt ist.

• Polyeder, die als $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ geschrieben werden können, sind spitz.

Dann: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{pmatrix}$ hat aber Rang n.

Korollar

Wenn das lineare Programm $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ zulässig und beschränkt ist und das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ spitz, dann gibt es eine Ecke x' von P, sodass $c^t x' = \max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. $\square$