TDI-Systeme

Theorem

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) P ist ganzzahlig.

(b) Jede Fläche von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

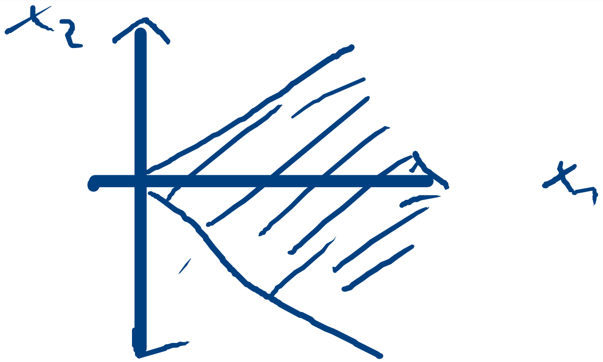
(c) Jede minimale Fläche von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(d) Jede Stützhyperebene von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(e) Jede rationale Stützhyperebene von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(f) $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ wird für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das Maximum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.

(g) $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ ist für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das Maximum endlich ist, ganzzahlig.



Definition:

Ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ heißt **vollständig dual ganzzahlig** (**totally dual integral**, **TDI**), wenn das LP $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das LP zulässig und beschränkt ist, eine ganzzahlige Optimallösung hat.

Beispiel: Die Systeme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreiben dasselbe Polyeder, aber nur das erste ist TDI.

TDI-Systeme

Theorem

Seien $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$, sodass $Ax \leq b$ TDI ist. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

TDI-Systeme

Theorem

Seien $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$, sodass $Ax \leq b$ TDI ist. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Beweis: $Ax \leq b$ TDI $\Rightarrow$ $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ist für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das Minimum endlich ist, eine ganze Zahl.

$\overset{\text{Dualität}}{\Rightarrow}$ $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ ist für jeden ganzzahligen Vektor c, für den das Maximum endlich ist, eine ganze Zahl.

Wegen "(g) $\Rightarrow$ (a)" aus dem vorigen Theorem folgt: P ist ganzzahlig. $\square$

TDI-Systeme

Satz

Wenn $Ax \leq b$ TDI ist und $a^t x \leq \beta$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ erfüllt ist, dann ist das System $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$ auch TDI.

TDI-Systeme

Satz

Wenn $Ax \leq b$ TDI ist und $a^t x \leq \beta$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ erfüllt ist, dann ist das System $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$ auch TDI.

Beweis: Sei $Ax \leq b$ TDI und $a^t x \leq \beta$ wie im Satz.

Sei c ein ganzzahliger Vektor, für den das LP $\min\{b^t y + \beta\gamma \mid A^t y + \gamma a = c, y \geq 0, \gamma \geq 0\}$ zulässig und beschränkt ist.

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
& \min\{b^t y + \beta\gamma \mid A^t y + \gamma a = c, y \geq 0, \gamma \geq 0\} \\
= \; & \max\{c^t x \mid Ax \leq b, a^t x \leq \beta\} \\
= \; & \max\{c^t x \mid Ax \leq b\} \\
= \; & \min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}
\end{aligned}
$$

Das letzte LP hat eine ganzzahlige Optimallösung y^*. Zusammen mit $\gamma^* = 0$ liefert das eine ganzzahlige Optimallösung des ersten LPs. $\square$

TDI-Systeme

Satz:

Wenn $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$ TDI ist und a ganzzahlig, dann ist $Ax \leq b, a^t x = \beta$ TDI.

TDI-Systeme

Satz:

Wenn $Ax \leq b, a^t x \leq \beta$ TDI ist und a ganzzahlig, dann ist $Ax \leq b, a^t x = \beta$ TDI.

Beweis:

Sei c ein ganzzahliger Vektor, für den

$$\begin{aligned} & \max\{c^t x \mid Ax \leq b, a^t x = \beta\} \\ = \; & \min\{b^t y + \beta(\lambda - \mu) \mid y \geq 0, \lambda, \mu \geq 0, A^t y + (\lambda - \mu)a = c\} \end{aligned} \tag{17}$$

endlich ist.

Seien $x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*$ primale und duale Optimallösungen. Sei $\tilde{c} := c + \lceil \mu^* \rceil a$.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \max\{\tilde{c}^t x \mid Ax \leq b, a^t x \leq \beta\} \\ = \; & \min\{b^t y + \beta\lambda \mid y \geq 0, \lambda \geq 0, A^t y + \lambda a = \tilde{c}\} \end{aligned} \tag{18}$$

ist endlich, weil x^* eines zulässige Lösung der Maximierungsproblems und y^* und $\lambda^* + \lceil \mu^* \rceil - \mu^*$ eine zulässige Lösung des Minimierungsproblems sind.

Beweis (Fortsetzung):

$Ax \leq b, a^t x \leq \beta$ ist TDI $\Rightarrow$ das letzte Minimierungsproblem hat eine ganzzahlige Optimallösung $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$.

$\Rightarrow$ $y := \tilde{y}$, $\lambda := \tilde{\lambda}$, $\mu := \lceil \mu^* \rceil$ ist eine ganzzahlige Optimallösung für das Minimierungsproblem in (17), denn:
Die Lösung ist offenbar zulässig, und ihre Kosten sind:

$$\begin{aligned} b^t\tilde{y} + \beta(\tilde{\lambda} - \lceil \mu^* \rceil) &= b^t\tilde{y} + \beta\tilde{\lambda} - \beta\lceil \mu^* \rceil \\ &\leq b^t y^* + \beta(\lambda^* + \lceil \mu^* \rceil - \mu^*) - \beta\lceil \mu^* \rceil \\ &= b^t y^* + \beta(\lambda^* - \mu^*). \end{aligned}$$

$y^*, \lambda^* + \lceil \mu^* \rceil - \mu^*$ ist eine zulässige Lösung des Minimierungsproblems in (18) und $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$ ist eine Optimallösung.

$\Rightarrow$ Das Minimierungsproblem in (17) hat ganzzahlige Optimallösung.

$\Rightarrow$ $Ax \leq b, a^t x = \beta$ ist TDI. $\square$

Notation: Ein System $Ax \le b$ heißt **minimal TDI**, wenn es TDI ist, aber kein echtes Teilsystem von $Ax \le b$, das dasselbe Polyeder beschreibt, TDI ist.

Definition

Eine endliche Menge $\{v_1, \ldots, v_t\}$ von Vektoren heißt **Hilbert-Basis**, wenn jeder ganzzahlige Vektor $\text{cone}(\{v_1, \ldots, v_t\})$ als nicht-negative ganzzahlige Linearkombination von $v_1, \ldots, v_t$ geschrieben werden kann.

<u>Beispiel:</u> Die Einheitsvektoren bilden eine Hilbert-Basis.

TDI-Systeme

Theorem

Jeder rationale polyedrische Kegel wird durch eine ganzzahlige Hilbert-Basis erzeugt.

Theorem

Jeder rationale polyedrische Kegel wird durch eine ganzzahlige Hilbert-Basis erzeugt.

Beweis:

Sei C ein rationaler polyedrische Kegel.
$\Rightarrow$ C wird von rationalen Vektoren $b_1, \dots, b_k$ erzeugt.
Können annehmen: die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ sind ganzzahlig.
H bestehe aus allen ganzzahligen Vektoren in

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ for } i \in \{1, \dots, k\} \right\}.$$

$\Rightarrow$ H ist endlich.

TDI-Systeme

Beweis (Fortsetzung):

Behauptung: H ist eine Hilbert-Basis, die C erzeugt.

Denn: Wegen $\{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq H \subseteq C$ gilt $C = \text{cone}(H)$.

Sei b ein ganzzahliger Vektor in C.

$\Rightarrow$ Es gibt nichtnegative Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_k$ mit $b = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i$, also

$$b = \left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \mu_i \rfloor b_i\right) + \sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) b_i.$$

$\Rightarrow$ Der Vektor

$$\overbrace{b - \left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \mu_i \rfloor b_i\right)}^{\text{ganzzahlig}} = \left(\sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) b_i\right) \in H$$

ist ganzzahlig und eine Element von P.

$\Rightarrow$ b kann als nicht-negative ganzzahlige Linearkombination von Elements aus H geschrieben werden.

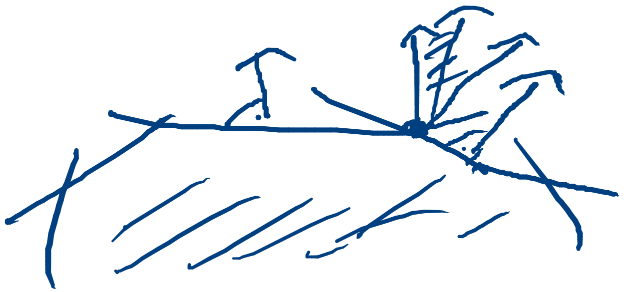
$\Rightarrow$ H ist eine Hilbert-Basis. $\square$

TDI-Systeme

Notation: Für ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ und eine Fläche F von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, heißt eine Zeile von A **aktiv**, wenn die zugehörige Ungleichung in $Ax \leq b$ von allen Vektoren $x \in F$ mit Gleichheit erfüllt ist.

Theorem:

Ein zulässiges Ungleichungssystem $Ax \leq b$ ist genau dann TDI, wenn für jede minimale Fläche F von $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Zeilen von A, die in F aktiv sind, eine Hilbert-Basis bilden.



Beweis:
"$\Rightarrow$:" Sei $Ax \leq b$ TDI. Sei F eine minimale Fläche von P, und seien $a_1, \ldots, a_t$ die Zeilen von A, die für F aktiv sind.
Zu zeigen: $\{a_1, \ldots, a_t\}$ ist eine Hilbert-Basis.
Sei c ein ganzzahliger Vektor in $\text{cone}(\{a_1, \ldots, a_t\})$.
Das Maximum in der Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b\} = \min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\} \qquad (19)$$

wird von jedem Vektor x in F angenommen.
$Ax \leq b$ TDI $\Rightarrow$ das duale Problem hat eine ganzzahlige Optimallösung y.
Komplementärer Schlupf: Die Einträge von y, die zu Zeilen von A gehören, die für F nicht aktiv sind, sind 0.
$\Rightarrow$ c ist ganzzahlige nicht-negative Linearkombination von $a_1, \ldots, a_t$.
$\Rightarrow$ $a_1, \ldots, a_t$ ist Hilbert-Basis.

Beweis (Fortsetzung):

"$\Leftarrow$:" Annahme: Fur jede minimale Fläche F von P bilden die für F aktiven Zeilen von A eine Hilbert-Basis.

Sei c ein ganzzahliger Vektor, für den die Optima in (19) endlich sind.

Zu zeigen: Das Minimum wird von einem ganzzahligen Vektor angenommen.

Sei F eine minimale Fläche von P, sodass von jedem Vektor in F das Maximum in (19) angenommen wird.

Es seien $a_1, \ldots, a_t$ die in F aktiven Zeilen von A.

Komplementärer Schlupf: $c \in \text{cone}(\{a_1, \ldots, a_t\})$.

$a_1, \ldots, a_t$ ist Hilbert-Basis $\Rightarrow$ $c = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i a_i$ für geeignete nicht-negative ganze Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$.

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ kann mit Nullen zu einem Vektor $y \in \mathbb{Z}^m$ mit $y \geq 0$, $A^t y = c$ und $b^t y = x^t A^t y = c^t x$ für alle $x \in F$ erweitert werden.

$\Rightarrow$ y ist eine ganzzahlige dual Optimallösung. $\square$

TDI-Systeme

Theorem

Eine rationales Ungleichungssystem $Ax \leq 0$ ist genau dann TDI, wenn die Zeilen von A eine Hilbert-Basis bilden.

Beweis: Folgt aus dem vorigen Theorem mit $b = 0$. Denn: In der minimalen Fläche von $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ sind alle Zeilen von A aktiv. $\square$