Flächen

Definition

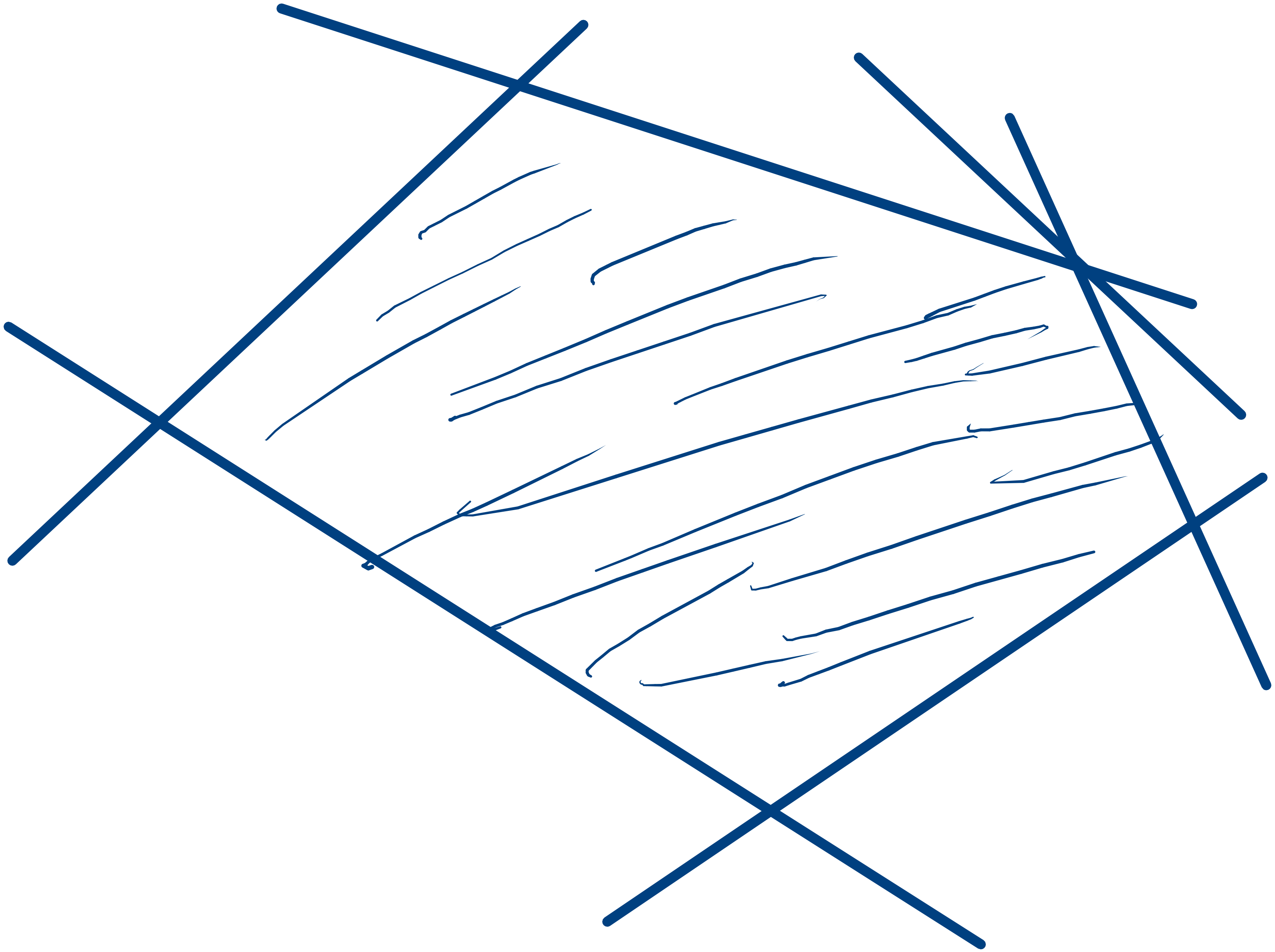
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein nicht-leeres Polyeder und $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Für $\delta := \max\{c^t x \mid x \in P\} < \infty$ heißt $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x = \delta\}$ **Stützhyperebene** (supporting hyperplane) von P.

(b) Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Fläche** (face) von P, falls $X = P$ oder falls es eine Stützhyperebene H von P mit $X = P \cap H$ gibt.

(c) Falls $\{x'\}$ eine Fläche von P ist, heißt x' **Ecke** (vertex) von P oder **Basislösung** (basic solution) des Systems $Ax \leq b$.

Polyeder mit m Flächen



Proposition

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $F \subseteq P$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) F ist eine Fläche von P.

(b) Es gibt einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$, sodass $\delta := \max\{c^t x \mid x \in P\} < \infty$ und $F = \{x \in P \mid c^t x = \delta\}$.

(c) Es gibt ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$, sodass $F = \{x \in P \mid A'x = b'\} \neq \emptyset$.

Beweis: "(a) $\Rightarrow$ (b)": Sei F eine Fläche von P. Falls $F=P$, dann wähle $c=0$.
$\Rightarrow \delta = 0$, $F = \{x \in P : 0^t x = \delta\} = P$.

Wenn $F \neq P$, dann muss es ein $c \in \mathbb{R}^n$ (verschieden vom Nullvektor) geben, sodass für $\delta = \max\{c^t x : x \in P\} < \infty$ gilt:

$F = \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \delta\} \cap P = \{x \in P : c^t x = \delta\}$

„(b) $\Rightarrow$ (c)": Seien c, δ und F wie in (b)

Sei $A'x \leq b'$ ein maximales Teilsystem von $Ax \leq b$, sodass $A'x = b'$ für alle $x \in F$.

$\Rightarrow F \subseteq \{x \in P : A'x = b'\}$

z.z.: $F \supseteq \{x \in P : A'x = b'\}$

Sei $\hat{A}x \leq \hat{b}$ das System der Ungleichungen aus $Ax \leq b$, die nicht in $A'x \leq b'$ enthalten sind.

Bezeichne die Ungleichungen in $\hat{A}x \leq \hat{b}$ mit $\hat{a}_j^t x \leq \hat{b}_j$ $(j=1,\dots,k)$

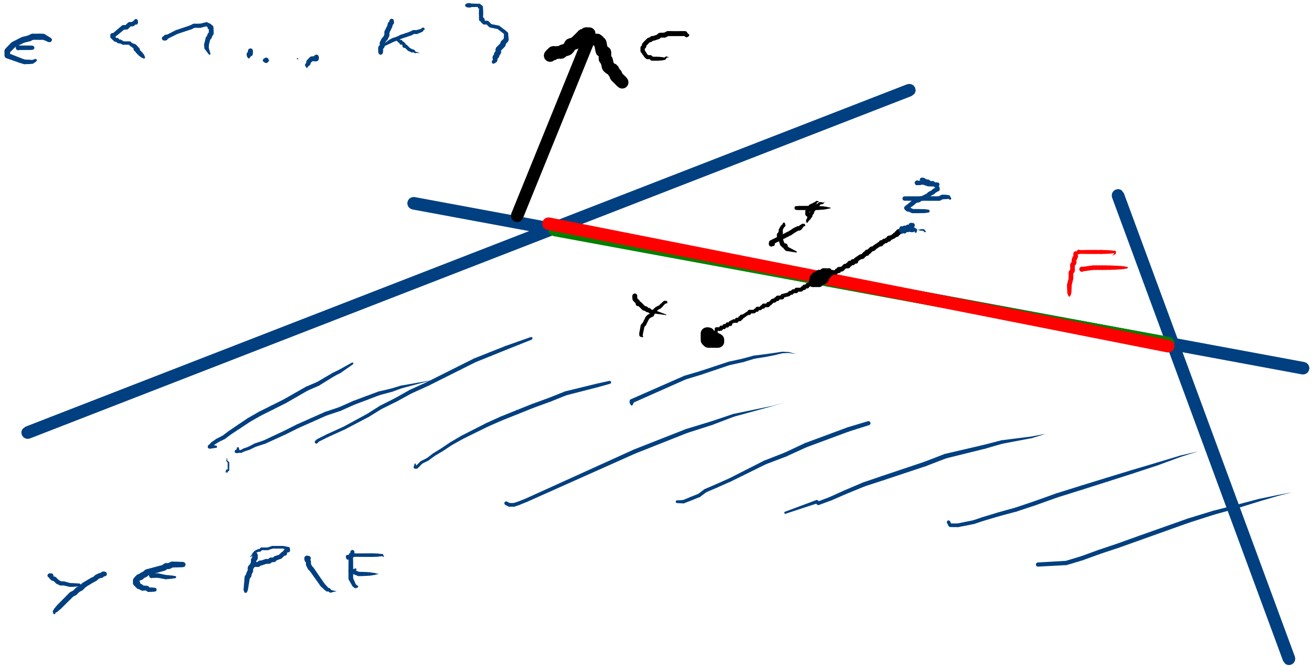
Für jedes $j \in \{1 \dots k\}$ gibt es ein $x_j \in F$ mit $\hat{a}_j^t x_j < b_j$ (nach Wahl von A', b')

Fall $k > 0$, setze $x^* := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j$

sonst sei x^* ein beliebiges Element von F.

$\Rightarrow x^* \in F$ und es gilt $\hat{a}_j^t x^* < \hat{b}_j$

für $j \in \{1, \dots, k\}$



Betrachte $y \in P \setminus F$

z.z.: $A'y \neq b'$

$y \in P \setminus F \Rightarrow c^t y < \delta$

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \dfrac{\hat{b}_j - \tilde{a}_j^t x^*}{\tilde{a}_j^t (x^* - y)}$ für alle

$j \in \{1, \dots, k\}$ mit $\tilde{a}_j^t x^* > \tilde{a}_j^t y$

Setze $z := x^* + \varepsilon(x^* - y)$

$\Rightarrow c^t z > \delta \Rightarrow z \notin P$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Ungleichung $a^t x \leq \beta$

aus dem System $Ax \leq b$, sodass $a^t z > \beta$.

Behauptung: Diese Ungleichung kann nicht

in $\tilde{A} x \leq \hat{b}$ liegen.

Annahme: $a^t x \leq \beta$ liegt dort in $\tilde{A} x \leq \hat{b}$

Falls $a^t x^* \le a^t y$, dann gilt:

$$a^t z = a^t x^* + \varepsilon a^t (x^* - y) \le a^t x^* < \beta \quad \text{↯}$$

Falls $a^t x^* > a^t y$, dann:

$$a^t z = a^t x^* + \varepsilon a^t (x^* - y^*)$$

$$< a^t x^* + \frac{\beta - a^t x^*}{a^t (x^* - y)} \cdot a^t (x^* - y) = \beta . \quad \text{↯}$$

$\Rightarrow a^t x = \beta$ gehört zu $A' x \le b'$

$$\Rightarrow a^t y = a^t \left(x^* + \frac{1}{\varepsilon} (x^* - z) \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \beta - \frac{1}{\varepsilon} a^t z < \beta$$

$\Rightarrow A' y \ne b'$

„(c) $\Rightarrow$ (a)": Sei $A'x \leq b'$ ein Teilsystem von $Ax \leq b$, sodass $F = \{x \in P : A'x = b'\}$.

Sei c^t die Summe aller Zeilenvektoren von A', und sei δ die Summe der Einträge von b'.

$\Rightarrow c^t x \leq \delta$ für alle $x \in P$,

$F = P \cap H$ mit $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \delta\}$

$\square$

Korollar

Sei $P \neq \emptyset$ ein Polyeder und F eine Fläche von P.

(a) Sei $c \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\max\{c^t x \mid x \in P\} < \infty$. Dann ist die Menge aller Vektoren x, bei denen das Maximum von $c^t x$ über P angekommen wird, eine Fläche von P.

(b) F ist ein Polyeder.

(c) Eine Teilmenge $F' \subseteq F$ ist genau dann eine Fläche von F, wenn F' eine Fläche von P ist.

(d) Wenn P von der Form $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ ist (d.h. P ist ein linearer Unterraum), dann hat P genau eine Fläche, nämlich P selbst. $\square$

Facetten

Definition

Es sei P ein Polyeder. Eine **Facette** (facet) von P ist eine inklusionsweise maximale Fläche F von P mit $F \neq P$. Eine Ungleichung $c^t x \leq \delta$ heißt **facettenbestimmend** (facet-defining) für P, wenn $c^t x \leq \delta$ für alle $x \in P$ gilt und $\{x \in P \mid c^t x = \delta\}$ eine Facette ist.

Theorem

Es sei $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ ein nicht-leeres Polyeder der Dimension $n - \operatorname{rank}(A)$. Es sei $A'x \leq b'$ ein kleinstes Ungleichungssystem, sodass $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A'x \leq b'\}$. Dann ist jede Ungleichung in $A'x \leq b'$ facettenbestimmend für P und jede Facette von P wird durch eine Ungleichung von $A'x \leq b'$ gegeben.

Beweis: Falls $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, dann hat P keine Facette, da P selbst die einzige Fläche von P ist.

Also nehmen wir $P \neq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ an.

Sei $A'x \leq b'$ ein kleinstes System von Ungleichungen, sodass

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, A'x \leq b'\}$$

Sei $a^t x \leq \beta$ eine Ungleichung in $A'x \leq b'$, und sei $A''x \leq b''$ der Rest des Systems $A'x \leq b'$ (ohne $a^t x \leq \beta$)

z.z.: $a^t x \leq \beta$ ist facettenbestimmend.

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $Ay = b$, $A''y \leq b''$ und $a^t y > \beta$. y existiert, weil wir sonst $A'y \leq b'$ durch das kleinere System $A''y \leq b''$ ersetzen könnten.

Und es sei $\tilde{y} \in P$ ein Vektor mit $A'\tilde{y} < b'$ (existiert, weil $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A)$)

Sei $z = \tilde{y} + \dfrac{\beta - a^t \tilde{y}}{a^t y - a^t \tilde{y}} (y - \tilde{y})$

$\Rightarrow a^t z = a^t \tilde{y} + \dfrac{\beta - a^t \tilde{y}}{a^t y - a^t \tilde{y}} (a^t y - a^t \tilde{y}) = \beta$

Außerdem $0 < \dfrac{\beta - a^t \tilde{y}}{a^t y - a^t \tilde{y}} < 1$

$\Rightarrow$ z ist Konvexkombination von y und

$\tilde{y}$. $\Rightarrow$ $z \in P$.

Sei: $F := \{x \in P : a^t x = \beta\}$

$\Rightarrow$ $F \neq \emptyset$ (da $z \in F$)

und: $F \neq P$, weil $\tilde{y} \in P \setminus F$

$\Rightarrow$ F ist eine Fläche von P, aber verschieden

von P. Und: F ist eine Facette, weil

$a^t x \leq \beta$ die einzige Ungleichung von $A'x \leq b'$ ist, die von allen Elementen von F mit

Gleichheit erfüllt wird ($z \in F$ erfüllt nur diese Ungleichung mit Gleichheit)

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition von Facetten. $\square$