•

•

Lemma

Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MIN-COST-FLOW-PROBLEMS. Ein b-Fluss f ist genau dann eine Baumlösung, wenn $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{E(G)}$ mit $\tilde{x}_e = f(e)$ eine Ecke des Polytops

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{E(G)} \mid 0 \leq x_e \leq u(e) \ (e \in E(G)), \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = b(v) \quad (v \in V(G)) \right\}.$$

ist

•

•

Korollar

Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MIN-COST-FLOW-PROBLEMS. Wenn es einen b-Fluss (G, u) gibt, dann gibt es eine Optimallösung von (G, u, b, c), die eine Baumlösung ist.

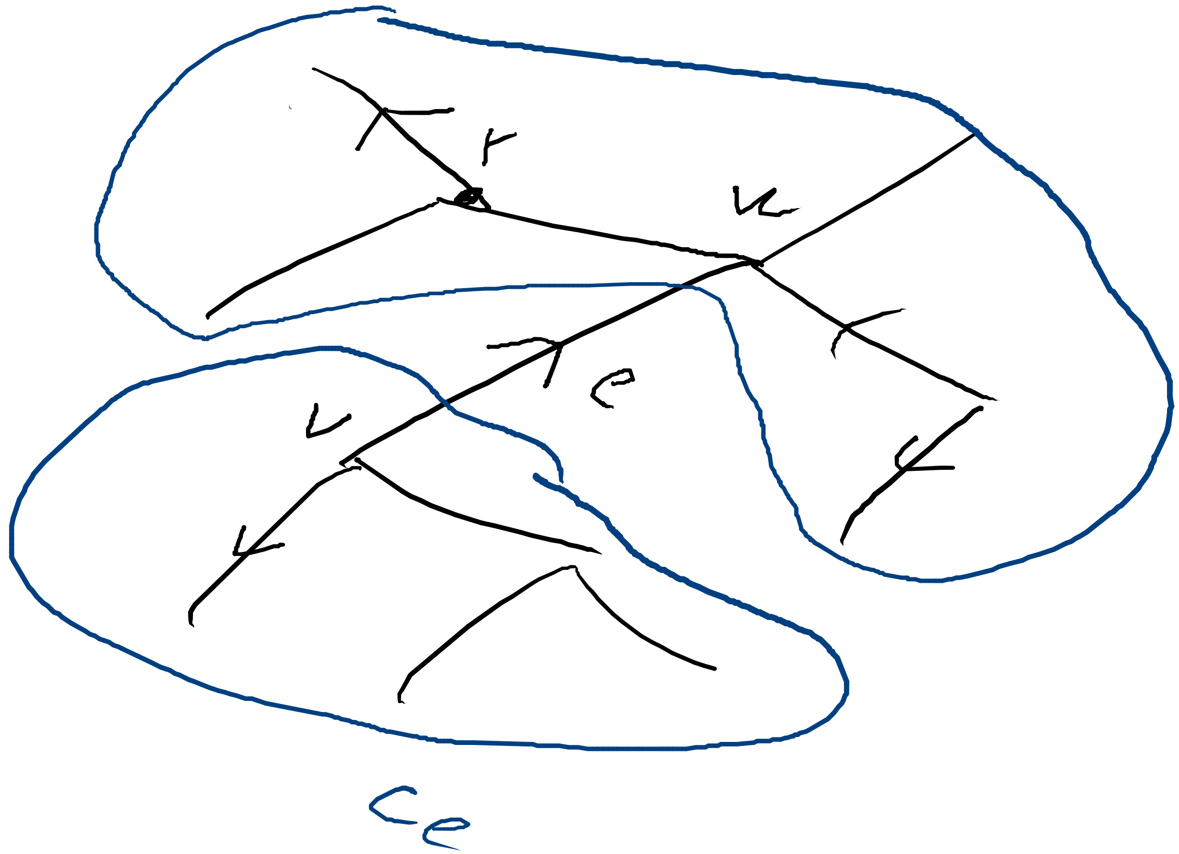
<u>Beweis:</u> Im spitzen Polyeder wird das Minimum einer linearen Funktion immer in einer Ecke angenommen. $\square$

Definition

Sei (G, u, b, c) ein MINIMUM-COST-FLOW-Instanz mit zusammenhängendem G. Eine **Spannbaum-Struktur** ist ein Quadrupel (r, T, L, U), wobei $r \in V(G)$, $E(G) = T \,\dot{\cup}\, L \,\dot{\cup}\, U$, $|T| = |V(G)| - 1$ und $(V(G), T)$ keinen ungerichteten Kreis enthalte. Der zu (r, T, L, U) **assoziierte b-Fluss** f ist definiert durch

- $f(e) = 0$ für $e \in L$,
- $f(e) = u(e)$ für $e \in U$,
- $f(e) = \sum_{v \in C_e} b(v) + \sum_{e' \in U \cap \delta^-(C_e)} u(e') - \sum_{e' \in U \cap \delta^+(C_e)} u(e')$ für $e \in \cancel{E(}T\cancel{)}$, wobei C_e die Knotenmenge der Zusammenhangskomponente von $(V(G), T \setminus \{e\})$ ist, die v enthälte (für $e = (v, w)$).

Die Struktur (r, T, L, U) heißt **zulässig**, wenn $0 \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in \cancel{E(}T\cancel{)}$ gilt. Eine Kante $(v, w) \in \cancel{E(}T\cancel{)}$ heißt **Abwärtskante**, wenn v auf dem ungerichteten r-w-Weg in T liegt. Sonst heißt sie **Aufwärtskante**.



<u>Beobachtung</u>: Der zu (r, T, c, u) assoziierte b-Fluss erfüllt die Flusserhaltungsgleichungen, ist aber nicht notwendigerweise zulässig.

Definition

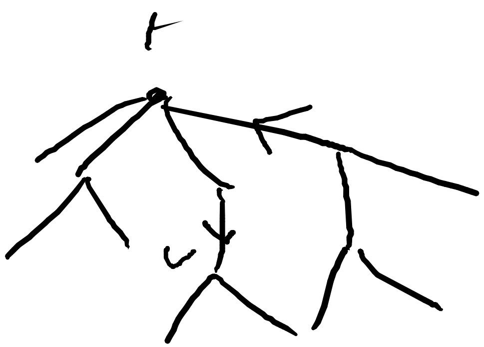
Eine zulässige Spannbaum-Struktur (r, T, L, U) heißt **stark zulässig**, wenn $0 < f(e)$ für jede Abwärtskante $e \in \cancel{E}(T)$ und $f(e) < u(e)$ für jede Aufwärtskante $e \in E(T)$.

Definition

Sei (r, T, L, U) ein Spannbaum-Struktur. Die eindeutig bestimmte Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\pi(r) = 0$ und $c_\pi(e) := c(e) + \pi(v) - \pi(w) = 0$ für alle $e = (v, w) \in T$ heißt das zu (r, T, L, U) **assoziierte Potential**.

Beobachtung: Die π-Werte in einem zu (r,T,L,U) assoziierte Potential geben den Abstand zu r in $(V(G),T)$ an.

Beobachtung: In einem stark zulässigen Spannbaum-Struktur kann man von jedem Knoten v Fluss über die Baumkanten zu r schicken, ohne unzulässig zu werden.



Spannbaum-Strukturen

Satz

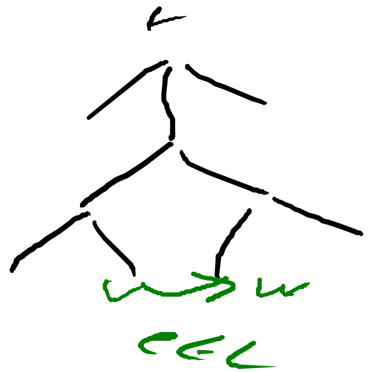
Zu gegebenem (G, u, b, c) und gegebener Spannbaum-Struktur (r, T, L, U) können der b-Fluss f und das Potential π zu (r, T, L, U) in Zeit $O(m)$ berechnet werden.

Beweis: Für π: Verwende Breitensuche.

Für f: Betrachte die Knoten sortiert nach nicht-aufsteigendem Abstand zu r. $\square$

<u>Beobachtung:</u>

- Für eine Kante $e=(v,w)\in L$ sind $c_\pi(e)$ die reduzierten Kosten der zugehörigen Nicht-Basisvariablen.
- Für eine Kante $e\in U$ sind $-c_\pi(e)$ die reduzierten Kosten der zugehörigen Nicht-Basisvariable.



$$c_\pi(v,w)= c(v,w)+\pi(v)-\pi(w)$$

Satz

Sei (r, T, L, U) ein zulässige Spannbaum-Struktur und π das zugehörige Potential. Wenn $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in L$ und $c_\pi(e) \leq 0$ für alle $e \in U$, dann ist der zu (r, T, L, U) gehörige b-Fluss optimal.

Beweis: In diesem Falle haben alle Nicht-Basisvariablen nicht-negative Kosten. Im Minimierungsproblem bedeutet das, dass die Lösung optimal ist. □

Fundamentalkreise

Definition

Für eine Kante $e = (v, w) \in E(\overleftrightarrow{G}) \setminus T$ mit $\overleftarrow{e} \notin T$ heißt e zusammen mit dem w-v-Weg der nur aus Kanten in T und Rückwartskanten von Kanten in T besteht der **Fundamentalkreis** von e. Der Knoten im Kreis, der am nächsten zu r liegt, heißt **Gipfel** (**peak**) von e.

Illustration:

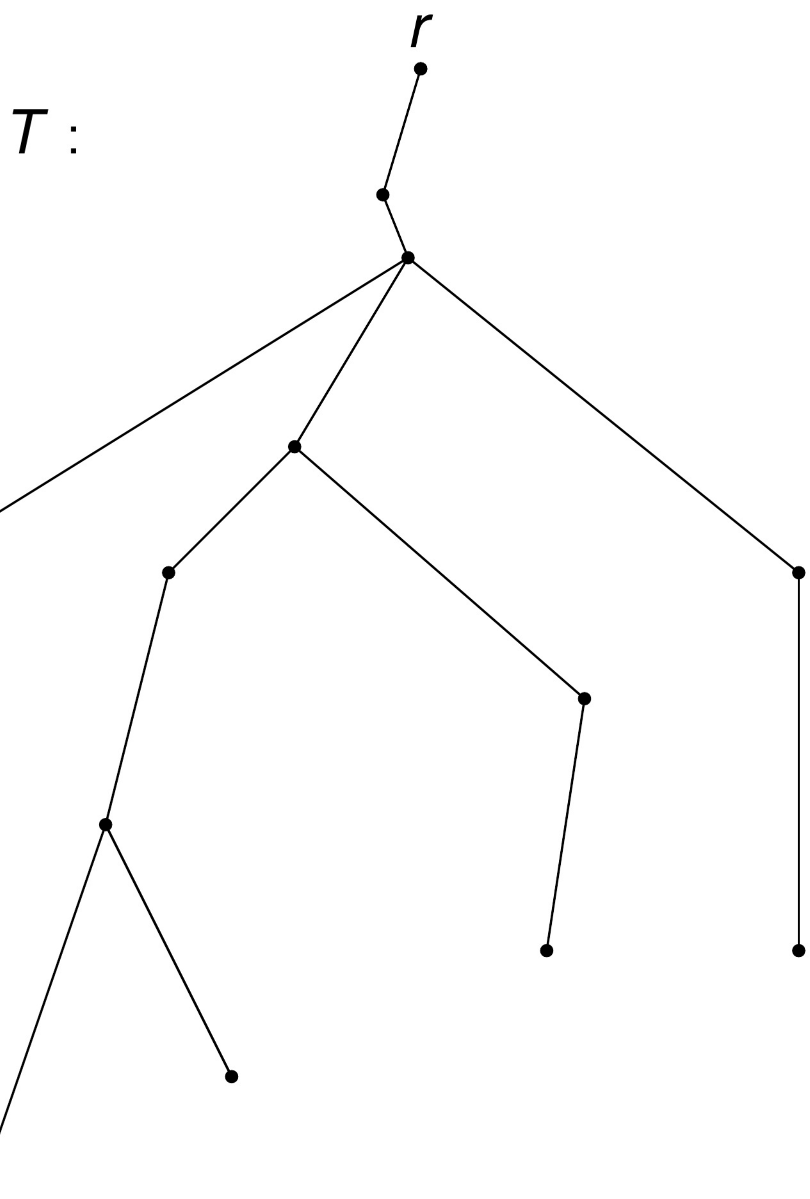
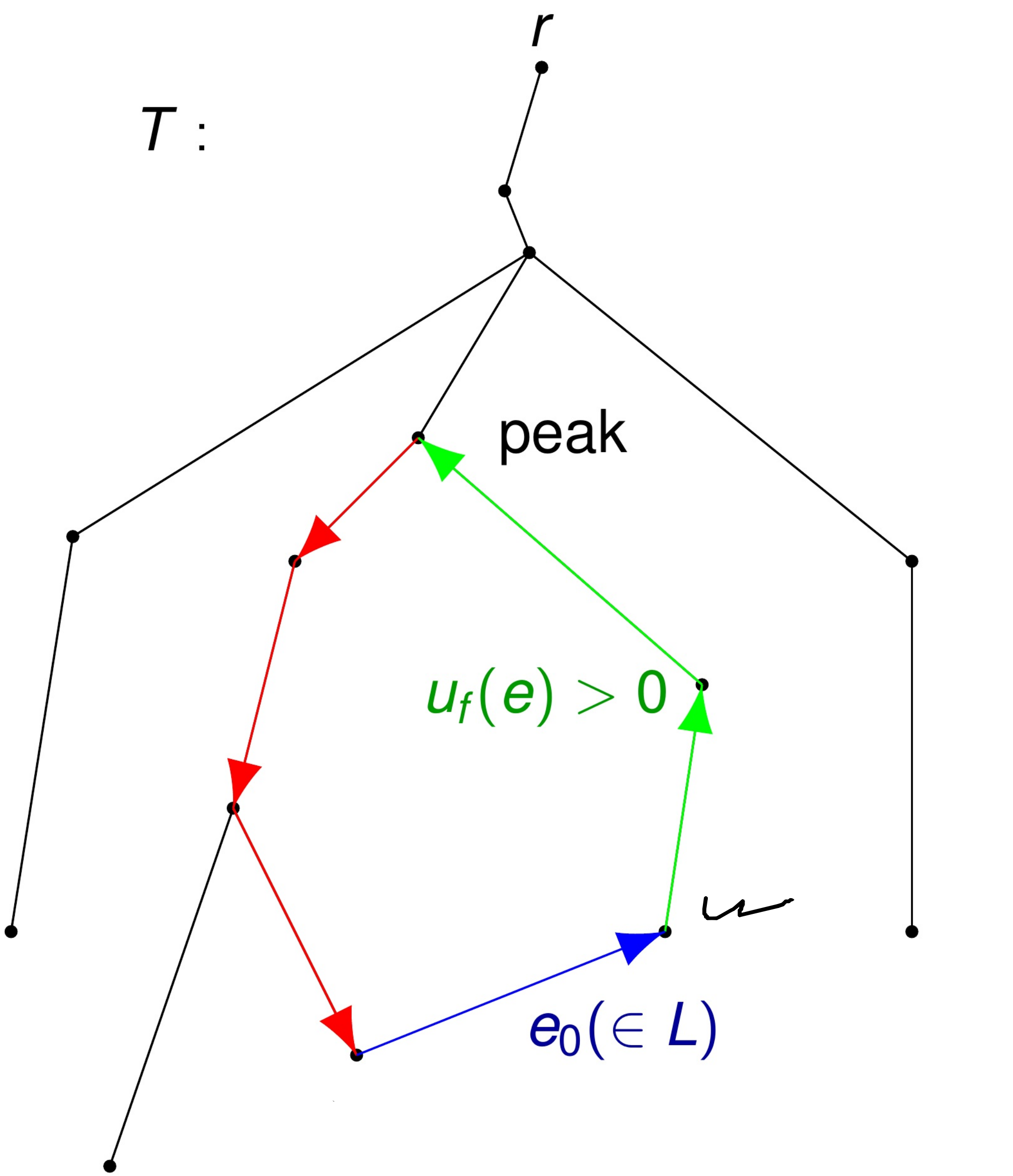


Illustration:



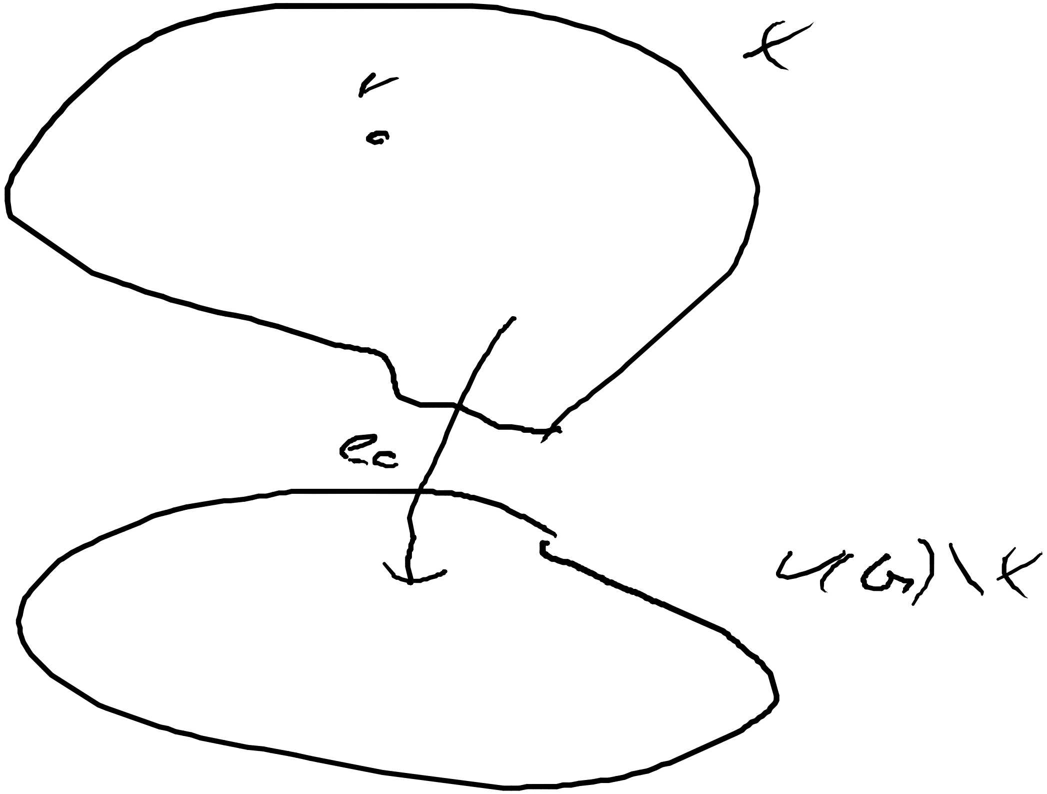
Kosten des Fundamentalkreises = $c_\pi(e_0)$.

Algorithm 5: Network Simplex Algorithm

Input: A MIN-COST-FLOW instance (G, u, b, c);
A strongly feasible spanning tree structure (r, T, L, U).

Output: A minimum-cost flow f.

1 Compute b-flow f and potential π associated to (r, T, L, U);
2 $e_0 :=$ an edge with $e_0 \in L$ and $c_\pi(e_0) < 0$ or with $e_0 \in U$ and $c_\pi(e_0) > 0$;
3 **if** (No such edge exists) **then return** f
4 $C :=$ the fund. circuit of e_0 (if $e_0 \in L$) or of $\overleftarrow{e_0}$ (if $e_0 \in U$) and let $\rho = c_\pi(e_0)$;
5 $\gamma := \min_{e' \in E(C)} u_f(e')$.
6 $e' :=$ last edge on C with $u_f(e') = \gamma$ when C is traversed starting at the peak;
7 Let e_1 be the corresponding edge in G, i.e. $e' = e_1$ or $e' = \overleftarrow{e_1}$;
8 Remove e_0 from L or U;
9 Set $T = (T \cup \{e_0\}) \setminus \{e_1\}$;
10 **if** $e' = e_1$ **then** Set $U = U \cup \{e_1\}$;
11 **else** Set $L = L \cup \{e_1\}$;
12 Augment f along γ by C;
13 Let X be the connected component of $(V(G), T \setminus \{e_0\})$ that contains r;
14 **if** $e_0 \in \delta^+(X)$ **then** Set $\pi(v) = \pi(v) + \rho$ for $v \in V(G) \setminus X$;
15 **if** $e_0 \in \delta^-(X)$ **then** Set $\pi(v) = \pi(v) - \rho$ for $v \in V(G) \setminus X$;
16 **go to** line 2;


K
v
e_c
U(G)\K

<u>Theorem:</u> Der Netzwerk-Simplex-Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten und berechnet eine Optimallösung.

<u>Beweis:</u> Optimalität folgt direkt aus früheren Satz.

Offensichtlich bleiben f und π nach einer Augmentierung unter der zu (r,T,L,U) gehörende Fluss und das zugehörige Potential.

z.z.: (r, T, L, u) bleibt stark zulässig

Zulässigkeit folgt aus der Wahl von g.

Für $e = (u, w)$ aus T sei $\hat{e} = (v, w)$, wenn (u, w) Aufwärtskante, sonst sei $\hat{e} = (w, v)$

z.z.: Für jedes $e \in T$ hat $\hat{e}$ eine positive Residualkapazität und eine Augmentierung.

Das ist klar für alle Kanten außerhalb von C.

Für alle Kanten vom Ende von e' bis zum Gipfel des Kreises ist es nach Wahl von e' wahr.

Für die andern Kanten e auf $C - e'$ ist die Residualkapazität $u_f(\hat{e})$ nach der Augmentierung mindestens γ

$\Rightarrow$ wir sind fertig, wenn $\gamma > 0$

wenn $y = 0$, dann muss e' auf

dem Weg vom Gipfel nach e_0 liegen

$\Rightarrow$ Die Kanten $\hat{e}$ vor e' (vom Gipfel

aus gesehen) haben weiterhin die

Eigenschaft $u_f(\hat{e}) > 0$.

Noch zu zeigen: Das Verfahren endet

nach endlicher Zeit.