

Kombinatorik, Graphen, Matroide

7. Übung

1. Analog zu Einbettungen von Graphen in die Ebene kann man auch überschneidungsfreie Einbettungen in den Torus betrachten. Zeigen Sie, dass der K_7 überschneidungsfrei in den Torus einbettbar ist. (2 Punkte)
2. Es sei G ein einfacher planarer Graph mit fester Einbettung, und jede Kante sei entweder rot oder blau gefärbt. Für jeden Knoten v seien $e_1(v), \dots, e_{|\delta_G(v)|}(v)$ die zu v inzidenten Kanten in der zyklischen Reihenfolge ihrer Einbettung. Die Zahl der *Farbwechsel* an einem Knoten v sei definiert als die Zahl der Indizes $i \in \{1, \dots, |\delta_G(v)|\}$, für die e_i eine andere Farbe als e_{i+1} hat (wobei wir $e_{|\delta_G(v)|+1}(v) = e_1(v)$ setzen). Zeigen Sie, dass es mindestens einen Knoten mit höchstens zwei Farbwechseln geben muss. (4 Punkte)
3. Sei G ein planarer zweifach zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Sei Φ eine Einbettung von G . Zeigen Sie, dass man dann die Gebiete von Φ so mit zwei Farben färben kann, dass keine zwei benachbarten Gebiete dieselbe Farbe haben. Dabei heißen zwei Gebiete benachbart, wenn es eine Kante gibt, die auf dem Rand beider Gebiete liegt. (3 Punkte)
4. Zeigen Sie, dass es genau fünf Platonische Körper gibt, d.h. dass es (bis auf Isomorphie) genau fünf 3-zusammenhängende reguläre planare Graphen gibt, deren Flächen alle von Kreisen derselben Länge berandet werden.
Bemerkung: Sie dürfen annehmen, dass die Graphen eindeutig bestimmt sind, sobald die Zahl der Knoten und Kanten sowie der Knotengrad und Länge der Kreise, welche die Gebiete beranden, bekannt sind. (4 Punkte)
5. Betrachten Sie folgendes Spiel: Gegeben sei ein leerer Graph G mit n_0 Knoten, der planar in die Ebene eingebettet ist. Spieler A und Spieler B führen nun abwechselnd Züge der folgenden Art durch: In jedem Zug werden Knoten u, v aus G gewählt (wobei $u = v$ möglich ist) und neuer Knoten w sowie die Kanten $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ in G eingefügt (falls $u = v$ entstehen also parallele Kanten). Der Knoten w und die beiden neuen Kanten sind dabei so in die Ebene einzubetten, dass sich mit den schon eingebetteten Knoten und Kanten eine planare Einbettung des erweiterten Graphen ergibt. Durch einen Zug darf kein Knoten entstehen, der mit mehr als drei Kanten verbunden ist. Spieler A beginnt, und es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug ausführt. Kann dieses Spiel beliebig lang fortgesetzt werden? Für welchen Spieler gibt es für $n_0 = 2$ eine Gewinnstrategie? (3 Punkte)

Homepage der Übung:

http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss18/kgm_uebung_ss18.html

Abgabe: Dienstag, den 5.6.2018, vor der Vorlesung.