Sommersemester 2018
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
2. Übung

1. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so dass $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

2. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und sei k eine ganze Zahl mit $|E| \geq k > r(E)$. Sei $\mathcal{B}_k = \{X \subseteq E \mid |X| = k \text{ und } r(X) = r(E)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_k$ die Menge der Basen eines Matroids ist. (4 Punkte)

3. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und es sei $T \subseteq E$. Die Abbildung $r' : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei wie folgt definiert: Für $X \subseteq E$ sei $r'(X) = r(X \cup T) - r(T)$. Zeigen Sie, dass r' die Rangfunktion eines Matroids ist. (4 Punkte)

4. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Abschlussoperator $\sigma : 2^E \to 2^E$. Es seien $X, Y \subseteq E$ mit $\sigma(X) = X$ und $\sigma(Y) = Y$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Aus diesen Voraussetzungen folgt $\sigma(X \cap Y) = X \cap Y$.

   (b) Aus diesen Voraussetzungen folgt $\sigma(X \cup Y) = X \cup Y$. (2+2 Punkte)

Homepage der Übung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss18/kgm_uebung_ss18.html`

Abgabe: Dienstag, den 24.4.2018, vor der Vorlesung.