

Kombinatorik, Graphen, Matroide

7. Übung

1. Ein einfacher planarer Graph heiße *kreisplanar*, wenn er so eingebettet werden kann, daß es eine Fläche gibt, zu der jeder Knoten inzident ist (d.h. jeder Knoten muß auf dem Rand der Fläche liegen). Zeigen Sie, daß ein einfacher Graph genau dann kreisplanar ist, wenn er weder den $K_{2,3}$ noch den K_4 als Minor enthält. (4 Punkte)
2. Betrachten Sie folgendes Spiel: Gegeben sei ein leerer Graph mit n_0 Knoten, der planar in die Ebene eingebettet ist. Spieler A und Spieler B führen nun abwechselnd Züge der folgenden Art durch: In jedem Zug werden zwei Knoten, die jeweils höchstens Grad 2 haben, durch einen Pfad der Länge zwei verbunden, der jeweils über einen neu hinzugefügten Knoten fhrt. Der neu hinzugefügte Pfad ist dabei so in die Ebene einzubetten, daß sich mit den schon eingebetteten Knoten und Kanten eine planare Einbettung des erweiterten Graphen ergibt. Spieler A beginnt, und es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug ausführt. Kann dieses Spiel beliebig lang fortgesetzt werden? Für welchen Spieler gibt es für $n_0 = 2$ eine Gewinnstrategie? (4 Punkte)
3. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine *Unterteilung* von G durch e , wenn $V(H) = V(G) \cup \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt *Unterteilung* von G .
 - (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H . Umgekehrt ist dies nicht der Fall.
 - (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 .
 - (c) Man folgere, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (4 Punkte)

b.w.

4. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von G ist definiert als Graph $L(G) = (E, F)$, wobei $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn G planar ist, dann ist auch der Liniengraph von G planar.

(b) Wenn der Liniengraph von G planar ist, dann ist auch G planar. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 10.6.2010, vor der Vorlesung.

Weiterer Hinweis:

Das nächste Treffen der Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik findet heute (1. Juni) um 18:00 Uhr im Konferenzraum (2.OG) des Arithmeums statt. Das Thema lautet „Einführung in die Hypergraphen“, alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.