Sommersemester 2010
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
2. Übung

1. Zeigen Sie:

   (a) $s_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} s_{n,i}$,

   (b) $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$. (4 Punkte)

2. Beweisen Sie
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$
(4 Punkte)

3. Gegeben sei eine Permutation $a_1a_2 \dots a_n$ von $\{1, \dots, n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat 1 4 3 5 2 die Inversionen 4,3; 4,2: 3,2; 5,2. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:

   (a) $I_{n,0} = 1$.

   (b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0, \dots, \binom{n}{2}$.

   (c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

   (d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2$. (4 Punkte)

4. Beweisen Sie den allgemeinen Satz von Ramsey: Es seien k und $l_1, \dots, l_r$ gegeben. Dann gibt es eine kleinste Zahl $R(k; l_1, \dots, l_r)$, so daß folgendes gilt: Ist N eine n-elementige Menge mit $n \geq R(k; l_1, \dots, l_r)$ und sind die k-elementigen Untermengen von N irgendwie mit den Farben $1, \dots, r$ gefärbt, so gibt es eine Farbe i, so daß in einer l_i-elementigen Untermenge von N alle k-elementigen Teilmengen mit i gefärbt sind. (4 Punkte)
   Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion über r. Für $r = 2$ bietet sich eine Induktion über k an.

Abgabe: Donnerstag, den 29.4.2010, **vor** der Vorlesung.