Mathematische Optimierung II
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sven Peyer

Übungsblatt 12

Aufgabe 1:

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie $\partial f(x) = \{Df(x)\}$ für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeigen sie, dass $\bar{x}$ genau dann globales Minimum von f ist, wenn $0 \in \partial f(\bar{x})$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in J := \{1, \ldots, m\}$, konvexe C^1-Funktionen und

$$f(x) := \max_{1 \leq j \leq m} f_j(x) \qquad \text{und} \qquad J_0(\bar{x}) := \{j \in J \,:\, f(\bar{x}) = f_j(\bar{x})\}.$$

Zeigen Sie: $\quad \mathrm{conv}\{Df_j(\bar{x}) \,:\, j \in J_0(\bar{x})\} \subset \partial f(\bar{x}) \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei $d \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ im Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$ für $t \in (0, \epsilon)$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass das Subgradientenverfahren mit $\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$ nicht zu einer Konvergenzrate der Form $||x_k - \bar{x}|| \leq ck^{-p}$ für ein $p > 1$ führen kann, falls es nicht nach endlich vielen Schritten terminiert.

(3 Punkte)
(b.w.)

Aufgabe 5:
Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem [Wolfe, 1972]:

$$P: \quad \begin{array}{lrcl} \min & w(x) & := & \frac{4}{3}\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right)^{\frac{3}{4}} - x_3 \\ \text{s.t.} & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ & x_3 & \leq & 2 \end{array}$$

(i) Berechnen Sie $Dw(x)$ und zeigen Sie, dass $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und konvex ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die LUB für alle zulässigen Punkte von (P) gilt.

(iii) Bestimmen Sie die Menge der optimalen Lösungen von (P).

Nun wird die zu Beginn von Kapitel 3.3 besprochene einfache Methode angewendet, entlang von zulässigen Abstiegsrichtungen zu minimieren. Sei für $k \geq 0$ und gegebenen Punkt $x^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $d^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ die Abstiegsrichtung in $x^{(k)}$, die das folgende Problem löst:

$$\min_{d\in\mathbb{R}^3} \left\{ Dw(x^{(k)})d \,:\, Dg_j(x^{(k)})d \geq 0, j \in J_0(x^{(k)}), d \in [-1,1]^n \right\}.$$

Des weiteren sei $x^{(k+1)}$ bestimmt durch $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}$ mit

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}) = \min\{f(x^{(k)} + td^{(k)}) \mid t > 0, x^{(k)} + td^{(k)} \in M[g]\}.$$

(iv) Bestimmen Sie für den Startpunkt $x^{(0)} := \left(\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\right)$ die Abstiegsrichtung $d^{(0)}$ sowie den Punkt $x^{(1)}$.

(v) Berechnen Sie $x^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und den Grenzwert $\bar{x}$ der Folge $(x^{(k)})_{k\geq 0}$.

(vi) Zeigen Sie, dass $\bar{x}$ kein KKT-Punkt ist.

(12 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 20. Juli 2004, vor der Vorlesung.

Literaturhinweise für Kapitel 2 und 3:

- M.S. Bazaraa, H.D. Sherali und C.M. Shetty:
  Nonlinear Programming - Theory and Algorithms.
- D.P. Bertsekas:
  Nonlinear Programming.
- J.B. Borwein und A.S. Lewis:
  Convex Analysis and Nonlinear Optimization - Theory and Examples.
- U. Faigle, W. Kern und G. Still:
  Algorithmical Principles of Mathematical Programming.